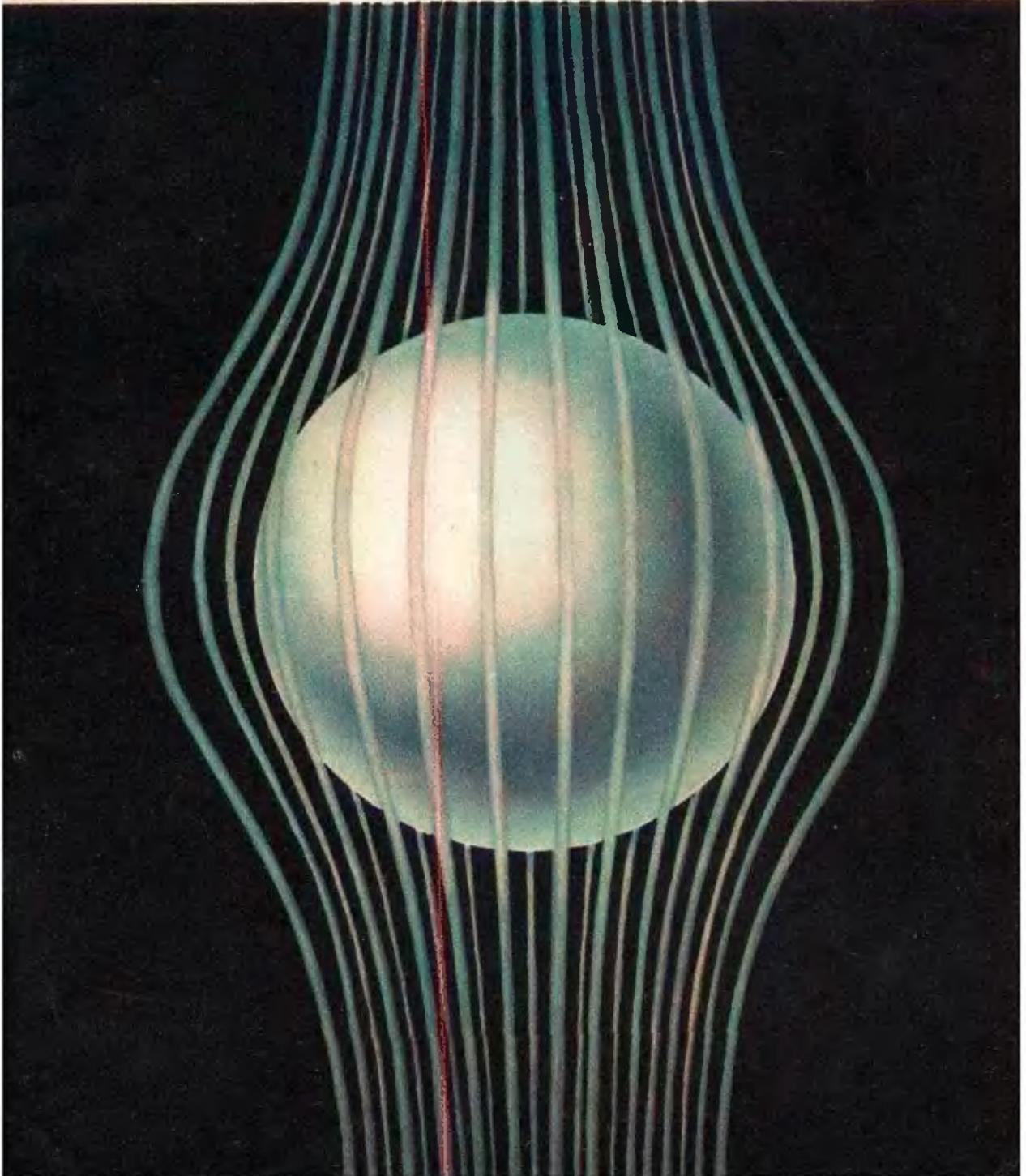


# Квант

*Научно-популярный  
физико-математический  
журнал*





**XV МЕЖДУНАРОДНАЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**



Зам. председателя жюри Н. С. Петраков инструктирует школьников.  
Нелегки олимпиадные задачи! (Первый день олимпиады.)



Научно популярный  
 физико-математический  
 журнал  
 Академии наук СССР  
 и Академии педагогических  
 наук СССР



Издательство «Наука»  
 Главная редакция  
 физико-математической  
 литературы

Главный редактор  
 академик И. К. Кикоин  
 Первый заместитель  
 главного редактора  
 академик А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**

М. И. Башмаков  
 С. Т. Беляев  
 В. Г. Болтянский  
 Н. Б. Васильев  
 Ю. Н. Ефремов  
 В. Г. Зубов  
 П. Л. Капица  
 В. А. Кириллин

главный художник  
 А. И. Климанов  
 С. М. Козел

зам. главного редактора

В. А. Лешковцев  
 Г. Г. Макар Имманов  
 А. И. Маркушевич  
 Н. А. Патрикеева  
 И. С. Петраков  
 Н. Х. Розов  
 А. П. Савин  
 И. Ш. Слободянский

зам. главного редактора

М. Л. Смолянский  
 Я. А. Сморodinский  
 В. А. Фабрикант  
 А. Т. Цветков  
 М. П. Шаскольская  
 С. И. Шварцбург  
 А. И. Ширшов

**Редакция:**

В. Н. Березин  
 А. Н. Витенкин  
 художественный редактор  
 Г. М. Макарова  
 И. Б. Мамулова  
 Н. А. Минц  
 Т. С. Петрова  
 В. А. Тихомирова  
 зав. редакцией  
 Л. В. Чернова

**В НОМЕРЕ**

- 2 В. З. Кресин Природа сверхпроводимости  
 11 Р. С. Гутер, Ю. Л. Подунов Машина управляет  
 17 М. А. Гинцбург Измерение магнитных полей на Луне  
 25 Н. Б. Васильев Последовательность прыжков

**Лаборатория «Кванта»**

- 32 И. И. Воробьев Поверхностное натяжение чертит гиперболу

**Математический кружок**

- 34 М. Б. Бак, Н. А. Григорьев Механика помогает геометрии

**Задачник «Кванта»**

- 40 Задачи М231—М235, Ф243—Ф247  
 42 Решения задач М191—М194, Ф203—Ф207

**Практикум абитуриента**

- 52 С. В. Овчинников, И. Ф. Шарыгин Числовые данные в  
 геометрических задачах  
 57 И. П. Гурский Кинематика прямолинейного движения ма-  
 териальной точки  
 61 М. В. Драгнев Университет Дружбы народов имени Пат-  
 рика Лумумбы  
 62 А. Н. Борзяк, В. И. Давыдов, П. Т. Дыбов, И. И. Иаслузов  
 Телевидение готовит в вуз

**XV международная математическая олимпиада школьников**

- 64 И. С. Петраков, В. А. Скворцов XV математическая  
 71 М. Л. Смолянский История Международных олимпиад

**Рецензии, библиография**

- 74 А. И. Колмогоров Полезная книга  
 75 В. Н. Березин, Н. М. Доронина Книга о международных  
 математических олимпиадах

**«Квант» для младших школьников**

- 76 Задачи  
 77 Почему подушка мягкая?  
 78 Ответы, указания, решения

**Смесь (с 33, 51)**

Рисунок, проведенный на первой странице обложки иллюстрирует  
 эффект Мейснера — необычное взаимодействие сверхпроводящего то-  
 ка с магнитным полем. Рассказ о явлении сверхпроводимости мы  
 помещаем в этом номере журнала (см. с. 2)

## В. З. Кресин **Природа сверхпроводимости**

В начале XX-го века физикам удалось проникнуть в область температур, близких к абсолютному нулю. Это привело к возникновению совершенно новой области науки — физики низких температур.

Вещество, изучаемое в столь «холодных» лабораториях, находится в совершенно необычных условиях. Они отличаются от привычных условий тем, что температура понижена почти на  $300^\circ$ .

В мире низких температур наблюдается целый ряд весьма своеобразных явлений. И самые замечательные из них — это два «сверхъявления»: сверхпроводимость, о которой пойдет речь в этой статье, и сверхтекучесть жидкого гелия.

### Сверхпроводящее состояние вещества

Открытие сверхпроводимости. Явление сверхпроводимости было открыто немногим более 60 лет тому назад, в 1911 году. В лаборатории голландского физика Камерлинг-Оннеса исследовалось электрическое сопротивление металлов при сверхнизких температурах.

Камерлинг-Оннеса интересовало, как изменяется способность чистых металлов проводить электрический ток при понижении температуры. Сопротивление движению электронов в чистом металле возникает за счет тепловых колебаний ионов, расположенных в узлах кристаллической решетки. При понижении температуры эти колебания становятся менее интенсивными, что приводит к уменьшению сопротивления. В качестве объекта исследования была выбрана ртуть, так как ее можно было легко очистить от примесей. Вначале сопротивление ртути действительно уменьшалось с понижением температуры. Однако при  $T \approx 3,71^\circ$  \*) (в дальнейшем эта точка получила название критической температуры и стала обозначать-

ся  $T_k$ ) произошло непредвиденное. Электрическое сопротивление скачком обратилось в нуль (рис. 1). При температурах, меньших  $T_k$ , ток протекал по металлу без всякого сопротивления. Позднее Камерлинг-Оннес писал: «Не осталось сомнений в существовании нового состояния ртути, в котором сопротивление фактически исчезает... Ртуть перешла в новое состояние, которое в соответствии с его необыкновенными электрическими свойствами можно назвать сверхпроводящим состоянием\*\*».)

\*\*) Из речи, произнесенной при вручении Нобелевской премии.

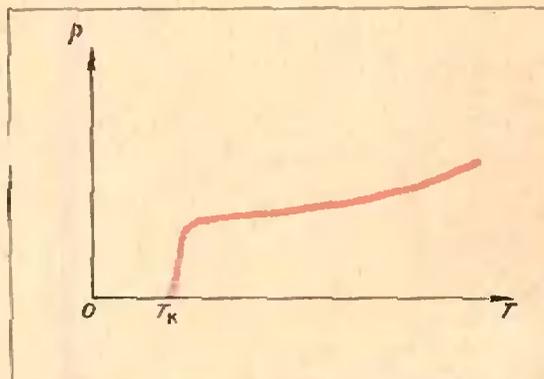


Рис. 1.

\*) Здесь и ниже мы приводим значения температуры по шкале Кельвина.

Отсутствие электрического сопротивления означает, что при протекании тока полностью отсутствуют потери энергии. Ведь тепловые потери при прохождении тока по обычным, несверхпроводящим металлам (такие металлы называют нормальными) обусловлены сопротивлением проводника. Это видно из известной формулы, выражающей закон Джоуля — Ленца:

$$Q = I^2 R t.$$

В сверхпроводнике электроны не испытывают сопротивления и не теряют энергии. Поэтому сверхпроводящий ток не затухает.

В 1959 году был поставлен такой эксперимент. В металлическом кольце был наведен сверхпроводящий ток. Через два с половиной года приборы не отметили никакого уменьшения этого тока. Отсутствие тепловых потерь приводит к тому, что время циркуляции тока по кольцу практически бесконечно велико.

Сверхпроводящие вещества. Впервые эффект сверхпроводимости был обнаружен при исследовании ртути. Однако вскоре были открыты новые сверхпроводники.

В настоящее время известно около 25 элементов, переходящих при понижении температуры в сверхпроводящее состояние. Самая высокая критическая температура у ниобия ( $T_k \approx 9,2^\circ$ ), а самая низкая — у иридия. У иридия сверхпроводимость обнаруживается при температуре всего  $0,140^\circ$ . Сейчас достигнуты температуры в тысячные доли градуса. Возможно, многие элементы окажутся сверхпроводниками при температурах более низких, чем  $T_k$  иридия.

Основную часть сверхпроводящих веществ составляют не чистые вещества, а сплавы и соединения. Сейчас известно около 500 таких сверхпроводящих веществ, и их число все время увеличивается. Во многих лабораториях мира ведется интенсивный поиск новых сверхпроводящих материалов.

Самые высокие температуры, при которых сохраняется свойство сверхпроводимости, наблюдаются именно в сплавах. Долгие годы «рекордсменом» был сплав ниобия с оловом  $Nb_3Sn$ , критическая температура которого  $18,1^\circ$ . В настоящее время самой высокой  $T_k$  обладает сложное соединение  $Nb_3Al-Nb_3Ge$ , синтезированное несколько лет тому назад и сохраняющее свойство сверхпроводимости вплоть до температуры  $T_k = 20,1^\circ$ .

Уже простое изучение свойств сверхпроводников позволяет сделать некоторые интересные выводы.

Существуют сплавы (например, сплав меди с серой  $CuS$  или золота с висмутом  $Au_2Bi$ ), компоненты которых порознь сверхпроводниками не являются.

Бериллий становится сверхпроводящим только в том случае, если образец приготовлен в виде тонкой пленки, толщина которой не превышает  $10^{-5}$  см.

Различные металлы неодинаково проводят электрический ток. Можно было бы ожидать, что такие хорошие проводники, как медь, золото, серебро, у которых сопротивление в обычных условиях и так очень мало, легче других веществ переходят в состояние сверхпроводимости. Однако на опыте наблюдается совсем другая картина. Именно в этих металлах сверхпроводимость не обнаружена. Важность этого факта отмечалась физиками еще задолго до создания теории сверхпроводимости. Так, в книге Я. Г. Дорфмана и И. К. Киконна, вышедшей 40 лет тому назад\*), читаем: «То обстоятельство, что ни Ag, ни Cu, ни другие наилучшие проводники не переходят в сверхпроводящее состояние, но, наоборот, ... плохие проводники... обладают этой удивительной особенностью, свидетельствует о том, что механизм сверхпроводимости совершенно отличен от механизма обычной проводимости».

\*) Я. Г. Дорфман, И. К. Киконн. Физика металлов. ГТТИ, 1933.

Недавно было обнаружено, что некоторые полупроводники также могут при низких температурах переходить в сверхпроводящее состояние.

Особое состояние вещества. Слово «сверхпроводимость» отражает способность веществ проводить электрический ток без всякого сопротивления. Но это — не единственная особенность сверхпроводников. Сверхпроводящий переход — это не только исчезновение электрического сопротивления. Это переход в совершенно новое физическое состояние. В сверхпроводниках наблюдаются аномалии почти всех известных физических свойств. О чем бы ни шла речь — о теплоемкости, о поглощении света или звука, о поведении в магнитном поле — всегда отмечают особые свойства сверхпроводников, резко отличающиеся от свойств обычных металлов. При переходе через критическую температуру  $T_k$  мы попадаем в мир особых законов. Именно поэтому мы и будем говорить не просто о сверхпроводимости, а о сверхпроводящем состоянии вещества.

Остановимся сначала на главном вопросе: какова природа сверхпроводимости? Как объясняется явление сверхпроводимости и что происходит в веществе, когда его температура приближается к абсолютному нулю?

### Как объясняется явление сверхпроводимости?

Сверхпроводимость была открыта, как упоминалось выше, в 1911 году. Открытие Камерлинг-Оннеса вызвало огромный интерес. Многие физики пытались разными способами объяснить исчезновение электрического сопротивления и другие особенности сверхпроводящего состояния. Среди них были А. Эйнштейн, еще в 1920 году отмечавший аналогию сверхпроводимости и ферромагнетизма; один из создателей квантовой механики В. Гейзенберг, пытав-

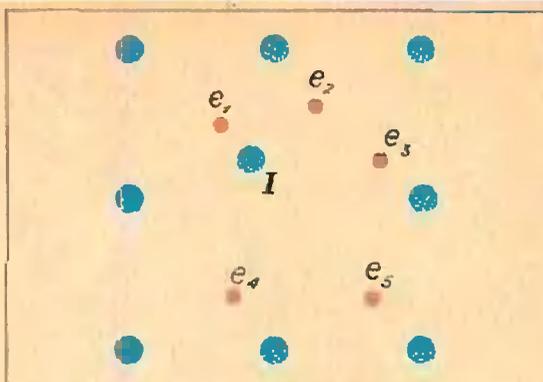


Рис. 2.

шийся объяснить сверхпроводимость особенностями электростатического взаимодействия электронов, и многие, многие другие.

Однако прошло почти полвека, прежде чем удалось решить эту загадку. Только в 1957 году появилась работа американских физиков Д. Бардина, Л. Купера и Д. Шриффера, в которой была изложена теория сверхпроводимости.

Притяжение между электронами. Название этого раздела может вызвать законное удивление. В самом деле, электроны как частицы с одноименными электрическими зарядами должны не притягиваться, а отталкиваться друг от друга. Оказывается, однако, что эффект сверхпроводимости определяется именно наличием сил межэлектронного притяжения.

Электронный газ в металле или полупроводнике находится под воздействием кристаллической решетки, благодаря чему и появляется межэлектронное притяжение. Попробуем наглядно представить себе механизм возникновения этого притяжения. Рассмотрим взаимодействие каких-нибудь двух электронов  $e_1$  и  $e_2$ , находящихся в металле (рис. 2). Между ними действуют, прежде всего, обычные силы кулоновского отталкивания. Но, кроме того, наличие кристаллической решетки приводит к появлению дополнительного межэлектронного взаимодействия. Электрон  $e_1$

притягивает один из ионов кристаллической решетки и смещает его (например, ион  $I$  на рис. 2) из положения равновесия. Электрическое поле, создаваемое ионом  $I$ , действует и на остальные электроны, поэтому смещение иона сказывается и на них. Таким образом, с «помощью» ионов возникает дополнительное электрическое взаимодействие электронов. Теория сверхпроводимости доказывает, что оно носит характер притяжения.

Таким образом, кристаллическая решетка и есть та промежуточная среда, которая создает притяжение между электронами. Само притяжение можно представить себе следующим образом. Электрон притягивает ионы кристаллической решетки. В результате деформации решетки электрон оказывается окруженным «облаком» положительного заряда. Представьте, что величина этого положительного заряда превышает по величине заряд электрона, тогда электрон вместе с окружающей его ионной «шубой» оказывается положительно заряженной системой, которая и притягивается к другому электрону. При высоких температурах достаточно интенсивное тепловое движение отбрасывает частицы друг от друга, размывает ионную «шубу», что фактически уменьшает силы притяжения. При низких же температурах силы притяжения играют очень важную роль.

Может возникнуть вопрос: не противоречит ли существование межэлектронного притяжения известным законам физики? Если два электрона находятся в вакууме, то, конечно, они отталкиваются друг от друга. В среде сила их взаимодействия равна

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (\epsilon - \text{диэлектрическая проницаемость среды}).$$

Среда может иметь отрицательную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon < 0$ . Это приводит к изменению знака силы, и электроны в такой среде будут притягиваться друг к другу. Решетка кристалла и оказывается той сре-

дой, которая делает отрицательной диэлектрическую проницаемость в сверхпроводнике.

Таким образом, при температурах, близких к абсолютному нулю, между электронами действует кулоновское отталкивание и дополнительное притяжение. Все дальнейшее зависит от того, какая из этих сил окажется большей по величине. Если вплоть до абсолютного нуля преобладает отталкивание, металл остается нормальным и его свойства радикально не изменяются. Если же при некоторой температуре начинают преобладать силы притяжения, то вещество переходит в сверхпроводящее состояние.

**Электронные пары.** Притяжение между электронами, приводящее к сверхпроводимости, характеризуется рядом интересных особенностей. Если мы будем следить за поведением какого-нибудь электрона в сверхпроводнике, то окажется, что этот электрон неодинаково притягивается к разным электронам. Он «выберет» один определенный электрон, к которому будет притягиваться наиболее сильно. В частности, этот «выбранный» в данный момент электрон будет иметь противоположный импульс.

Электронная система в сверхпроводнике оказывается разбитой на пары связанных электронов. Состав электронных пар не стабилен. Он все время меняется, так что электронная система весьма динамична. Это выглядит так, как будто электроны собрались на балу и исполняют танец, во время которого постоянно меняются партнеры.

Особо следует остановиться на вопросе о размере электронной пары. Он составляет величину порядка  $10^{-4}$  см. Для сравнения заметим, что период кристаллической решетки примерно  $10^{-8}$  см, так что электроны, входящие в пару, находятся друг от друга на огромном расстоянии в  $10^4$  периодов решетки. И тем не менее именно они наиболее сильно притя-

гиваются друг к другу. Если состояние одного из электронов, входящих в пару, меняется под действием какой-нибудь силы (например, под влиянием магнитного поля), то это изменение сразу же скажется и на поведении другого электрона. В сверхпроводниках наблюдается редчайший в неживой природе пример дальной связи.

При повышении температуры возрастает роль хаотического теплового движения. Межэлектронное притяжение ослабевает, и, наконец, при некоторой температуре (это и есть критическая температура  $T_k$ ) вещество переходит из сверхпроводящего в обычное, нормальное состояние.

Отсутствие электрического сопротивления. Сверхпроводники замечательны тем, что в них электроны не отталкиваются, а притягиваются друг к другу.

Под действием сил притяжения электронная система превращается в связанный коллектив. Между частицами действуют силы сцепления.

В нормальных металлах электронный газ может увеличивать свою энергию любыми сколь угодно малыми порциями. В сверхпроводнике электронный газ не может поглощать любую энергию. Минимальная порция энергии, которую он может поглотить, — энергия связи электронной пары. Картина разрыва электронной пары похожа на распад атомного ядра. Нейтроны и протоны связаны в единое целое, и для разрыва системы требуется конечная энергия — энергия связи атомного ядра.

Электрическое сопротивление связано, как известно, с рассеянием электронов тепловыми колебаниями решетки или примесями\*). Механическая энергия движущихся электронов при этом переходит в тепловую

энергию. Представьте себе, что электронная система движется в кристалле с малой скоростью (сила тока при этом невелика). Тогда взаимодействие электронов с решеткой будет слишком слабым для того, чтобы возбудить электронную систему. Электронному газу при этом может быть сообщена энергия, меньшая энергии связи. Но электроны в сверхпроводнике, как уже было сказано, не могут ее поглотить. Поэтому они движутся так, как будто нет никакого рассеяния. А это и означает отсутствие электрического сопротивления, то есть возникновение эффекта сверхпроводимости.

Если же ток превышает некоторое значение, называемое критическим, то столкновения электронной системы с ионами или примесями становятся достаточно интенсивными и свойство сверхпроводимости исчезает.

### О некоторых свойствах сверхпроводников

Эффект Мейсснера. Говоря о свойствах сверхпроводников, мы в основном отмечали, что они пропускают ток без всякого сопротивления. В этом разделе мы расскажем еще о некоторых особенностях сверхпроводящего состояния.

Предположим, что сверхпроводник помещен во внешнее магнитное поле. Оказывается, что поле не в состоянии проникнуть в толщу сверхпроводника.

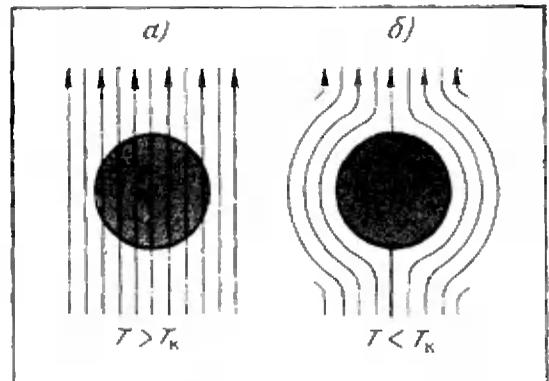


Рис. 3.

\*) Подробнее о природе сопротивления рассказано в статье М. И. Каганова и Г. Л. Любарского «Электроны движется с трением» («Квант», 1973, № 6).

При температурах, больших  $T_k$ , силовые линии магнитного поля проникают в вещество, как во всякий нормальный металл (рис. 3, а). Начнем понижать температуру, не выключая при этом магнитного поля. Как только достигается критическая температура  $T_k$ , происходит переход в сверхпроводящее состояние; при этом силовые линии выталкиваются из толщи образца (рис. 3, б). Это явление, называемое эффектом Мейсснера, было открыто в 1933 году.

Как же происходит выталкивание магнитных силовых линий из сверхпроводника? Ответ на этот вопрос тесно связан с самим эффектом сверхпроводимости, то есть с возможностью протекания незатухающих электрических токов.

Предположим, что мы хотим в веществе поддерживать постоянный электрический ток. В нормальном металле для этого необходимо создать постоянное электрическое поле. Магнитное поле не подходит для этой цели, так как оно не совершает никакой работы, а это необходимо, поскольку существует сопротивление движению электронов, возникают тепловые потери, и поэтому необходим непрерывный подвод энергии.

Совершенно иные процессы разыгрываются в сверхпроводниках. Сопротивление в них равно нулю, и поэтому для поддержания электрического тока никакой работы не требуется. Постоянный ток в сверхпроводниках может создаваться магнитным полем. Это очень важная особенность электромагнетизма сверхпроводников.

Вернемся теперь к эффекту Мейсснера. Когда сверхпроводник вносится во внешнее магнитное поле, в его поверхностном слое возникает вызванный этим полем сверхпроводящий ток. Этот ток, как и всякое движение зарядов, создает собственное магнитное поле, которое противоположно внешнему магнитному полю. В теории сверхпроводимости доказывается, что внутри сверхпроводника происходит полная компенсация

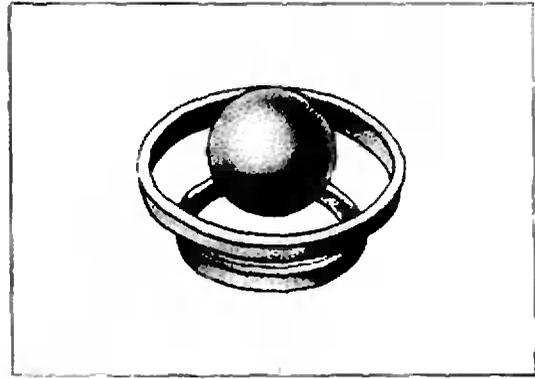


Рис. 4.

этих полей, поэтому магнитное поле там отсутствует. Таким образом, поверхностный слой сверхпроводника является магнитным экраном, не пропускающим внутрь вещества магнитное поле.

«Гроб Магомета». Эффект Мейсснера дает возможность наблюдать целый ряд очень необычных явлений.

Вот, например, одно из них. Если взять металлическое кольцо, в котором циркулирует сверхпроводящий ток, и над ним поместить сферу, также находящуюся в сверхпроводящем состоянии, то мы увидим, что сфера (если она не очень тяжелая) висит над кольцом без всякой поддержки.

На рисунке 4 изображена сфера, висящая над сверхпроводящими кольцами. Как же объясняется возможность такого подвешивания?

При протекании тока по кольцу в окружающем пространстве появляется магнитное поле. Выше мы говорили о том, что сверхпроводящий ток может создаваться магнитным полем. Именно такой ток и возникает в металлической сфере. Этот ток имеет такое направление, при котором его собственное магнитное поле противоположно полю, создаваемому током в кольце. Это следует из закона сохранения энергии так же, как и правило Ленца, определяющее направление индукционного тока.

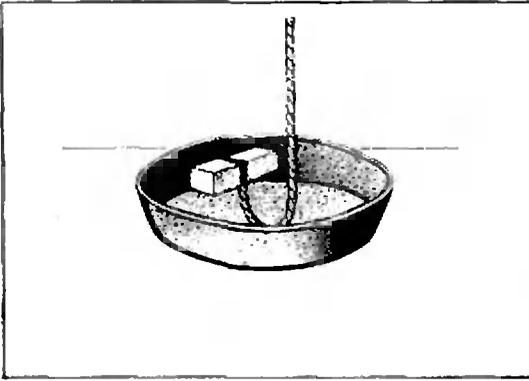


Рис. 5.

Направления токов в кольце и в сфере оказываются противоположными, а это приводит к появлению силы отталкивания. Сфера висит на высоте, определяемой равенством силы ее тяжести и силы отталкивания токов.

На рисунке 5 показан другой эксперимент. Постоянный магнит висит над металлическим образцом, в котором магнитным полем индуцируется сверхпроводящий ток. Этот эксперимент похож на предыдущий. Роль колец, создающих магнитное поле, играет постоянный магнит. Этот эксперимент получил шуточное название «гроб Магомета» (по преданию, гроб пророка Магомета висел в воздухе без всякой поддержки).

Сверхпроводники в магнитном поле. Критическое поле. Если увеличивать внешнее магнитное поле, то при некотором его значении  $B_k$  (это значение называется критическим магнитным полем) сверхпроводящее состояние разрушается, и вещество переходит в обычное нормальное состояние. Величина  $B_k$  зависит от температуры. Чем ближе мы подходим к критической температуре, тем меньше величина  $B_k$  и тем легче разрушается состояние сверхпроводимости.

На рисунке 6 показано, как с ростом температуры изменяется величина критического поля  $B_k$ . Наиболее устойчиво сверхпроводящее состоя-

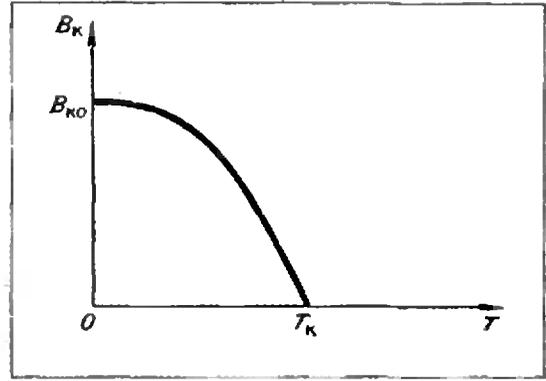


Рис. 6.

ние при абсолютном нуле (значение  $B_{k0}$ , соответствующее  $T = 0^\circ$ , максимально). Когда температура становится равной  $T_k$ , величина критического магнитного поля, естественно, обращается в нуль.

Таким образом, металл можно перевести из сверхпроводящего в нормальное состояние и не повышая его температуры. Такой переход может произойти при воздействии на сверхпроводник магнитного поля.

Не следует считать поэтому, что вещество при температурах, меньших  $T_k$ , — обязательно сверхпроводник. Оно может быть и нормальным металлом, если величина окружающего магнитного поля превышает  $B_k$ .

На первый взгляд может показаться, что сверхпроводящий ток, протекающий без тепловых потерь, идеально подходит для создания сколь угодно сильных магнитных полей. Ведь при использовании обычных электромагнитов большую роль играют джоулевы потери. Если мы хотим получить очень сильные магнитные поля, то необходимо в обмотках создавать достаточно сильные токи; при этом из-за тепловых потерь провода могут просто расплавиться.

В сверхпроводниках из-за отсутствия тепловых потерь такой опасности нет. Поэтому и может показаться, что при увеличении сверхпроводящего тока мы можем получить любое требуемое значение индукции магнитного поля. Однако как только поле

достигает значения  $V_k$ , сверхпроводимость разрушается, и поэтому дело обстоит не так просто.

Был обнаружен тем не менее класс сверхпроводящих веществ, способных создавать мощные магнитные поля и выдерживать сильные токи. Но описание их свойств — это предмет особого рассказа.

Говоря об электромагнитных свойствах сверхпроводников, следует отметить еще одну любопытную особенность, обусловленную наличием пар связанных электронов.

Основным законом, описывающим постоянный ток в нормальном металле, является закон Ома, который может быть записан в так называемой локальной форме:  $j = E/\rho$  ( $\rho$  — удельное сопротивление проводника,  $E$  — напряженность электрического поля,  $j$  — плотность тока). Согласно закону Ома, величина тока в определенном месте металла определяется значением электрического поля в этом же месте.

В сверхпроводниках все выглядит совершенно иначе. Постоянный сверхпроводящий ток создается, как мы уже отмечали, не электрическим, а магнитным полем. Но разница состоит не только в этом. Из-за межэлектронной связи оказывается, что если внешнее поле подействует на какой-нибудь электрон в сверхпроводнике, то это действие «почувствует» и другой электрон, связанный с ним в пару.

Поместим сверхпроводник во внешнее магнитное поле. Электроны, находящиеся в поверхностном слое (в толщу образца поле не проникает), приходят в движение, и создается сверхпроводящий ток. При этом электрон движется как благодаря непосредственному действию на него внешнего магнитного поля, так и под влиянием других, связанных с ним электронов, также находящихся под воздействием поля. Поэтому ток, возникающий в данном месте сверхпроводника, определяется не только значением внешнего поля в этом месте,

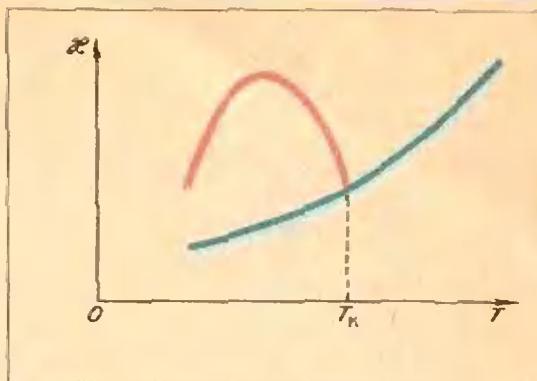


Рис. 7. Теплопроводность  $\chi$  нормального металла отмечена на рисунке синей линией, теплопроводность сверхпроводника — красной.

но и значением его в некоторой области. Такая связь тока с внешним полем, в отличие от случая нормального металла, называется нелокальной.

**Тепловые свойства.** Теплоемкость сверхпроводников при температурах, далеких от  $T_k$ , оказывается очень малой величиной, намного меньшей теплоемкости нормального металла, взятого при той же температуре (переход в нормальное состояние при этой же температуре можно осуществить с помощью магнитного поля). Поэтому температура сверхпроводников очень легко изменяется при подведении или, наоборот, при отводе теплоты.

Очень необычна картина передачи тепла в сверхпроводниках. Теплопроводность обычного металла меняется при изменении температуры. Например, способность сплавов проводить тепло уменьшается с понижением температуры. Сверхпроводящий сплав ведет себя совершенно иначе. После перехода в состояние сверхпроводимости его теплопроводность не убывает, а возрастает с понижением температуры, затем она достигает максимума и только после этого начинает убывать (рис. 7).

Это еще раз показывает, что сверхпроводимость — не только отсутствие

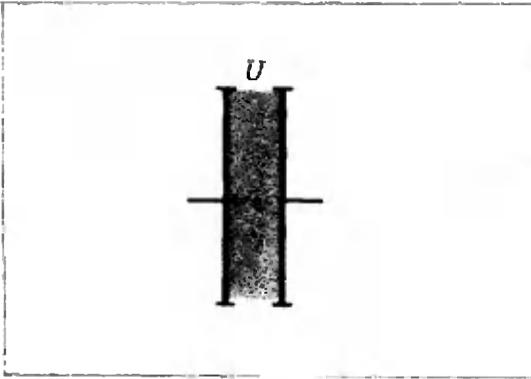


Рис. 8.

электрического сопротивления, а особое состояние вещества.

**Э ф ф е к т Д ж о з е ф с о н а.** Рассмотрим контакт (рис. 8), состоящий из двух сверхпроводящих пленок, разделенных тонким (около  $10^{-7}$  см) слоем изолирующего вещества. Электроны могут переходить из одной пленки в другую. Мы не станем здесь обсуждать вопрос о механизме прохождения электронов сквозь диэлектрический слой, поскольку это не относится непосредственно к предмету нашего рассказа. Отметим только возможность наблюдения удивительного явления, открытого всего лишь несколько лет тому назад.

Если к контакту приложить *постоянную* разность потенциалов, то через него потечет *переменный* сверхпроводящий ток. Этот переменный ток, так же, как, например, ток в колебательном контуре, будет излучать электромагнитные волны, и это излучение наблюдается на опыте.

Этот эффект носит имя английского физика Джозефсона, теоретически предсказавшего в 1962 году возможность его наблюдения.

Как мы уже говорили, в сверхпроводнике возникают связанные электронные пары. Эти пары проходят через диэлектрический слой и приобретают при этом энергию  $2eU$  ( $U$  — разность потенциалов, приложенная к контакту). В обычном металле эта энергия превратилась бы

в тепловую. При протекании сверхпроводящего тока сопротивления нет, и полученная электронной парой порция энергии  $2eU$  излучается в виде кванта с энергией  $h\nu = 2eU$ . На опыте и наблюдается излучение с частотой  $\nu = 2eU/h$ .

Излучать электромагнитные волны может только переменный ток. Именно такой ток и течет через контакт Джозефсона.

В выражение для частоты излучения входит удвоенный заряд электрона. Это связано с существованием электронных пар; полный заряд каждой равен  $2e$ . Одиночный электрон при прохождении разности потенциалов  $U$  приобретает энергию  $eU$ . Тот факт, что на опыте действительно наблюдается излучение с частотой  $\nu = 2eU/h$ , можно рассматривать как экспериментальное подтверждение правильности представления о существовании в сверхпроводниках связанных электронных пар.

Эффект Джозефсона позволяет создавать переменный ток с помощью постоянной разности потенциалов.

Мы рассказали о природе сверхпроводимости и о некоторых эффектах, наблюдаемых в сверхпроводниках. Физика сверхпроводимости еще очень «молода» и, несомненно, в этой области можно ожидать раскрытия еще многих тайн.

# Машина управляет

*Р. С. Гутер,  
Ю. Л. Полунов*

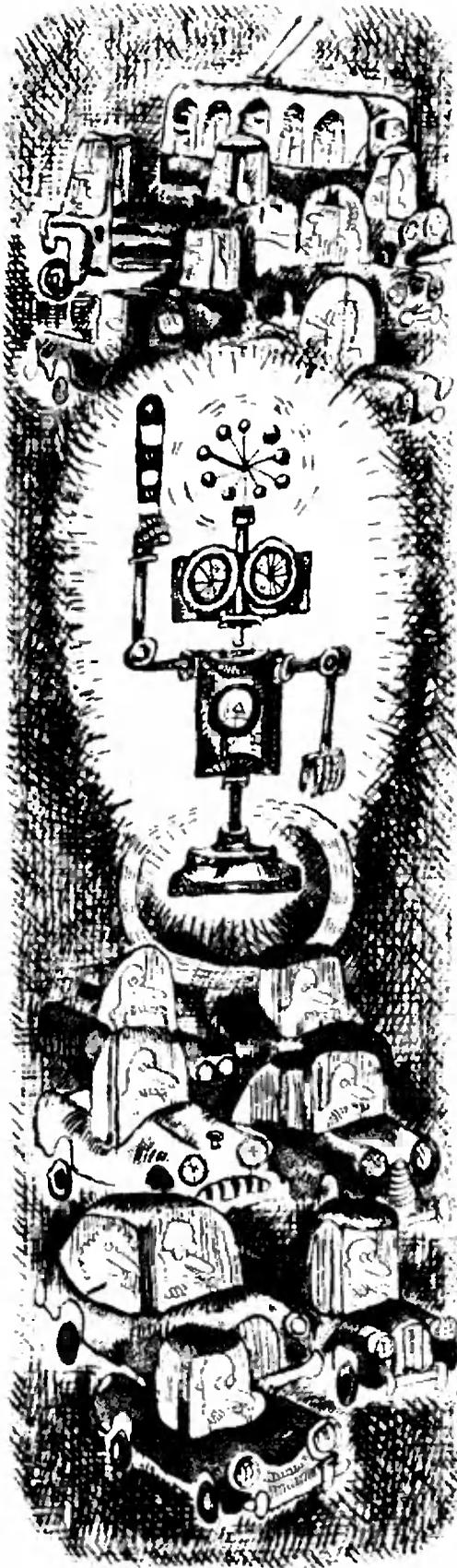
Недавно сотрудники американского журнала «Компьютерс энд аутомейшн» подсчитали, что из шестисот «профессий» электронных вычислительных машин около ста пятидесяти приходится на долю так называемых «управляющих» машин — машин, которые управляют быстротекущими технологическими и экспериментальными процессами. Мы хотим здесь рассказать о том, как машины управляют и почему для этого понадобились вычисления.

## Как управляет человек

По шоссе мчится автомобиль. Шофер управляет движением машины. Обгоняя попутный транспорт и разъезжаясь со встречными машинами, водитель непрерывно следит за дорогой. Он намечает траекторию и скорость движения и изменяет положение педалей и руля машины так, чтобы фактические траектория и скорость как можно меньше отличались от намеченных. Мозг — руки — машина — глаза — мозг — вот система управления автомобилем.

В электрической печи сушатся формы для отливок. Температура в печи не должна выходить за определенные пределы. Рабочий следит за стрелкой прибора, связанного с электрическим термометром внутри печи. Если стрелка приближается к заданным границам, то рабочий увеличивает или уменьшает ток в нагревательном элементе, передвигая движок реостата, чтобы стрелка возвратилась в нужное положение.

На плите варится борщ. Повар пробует борщ и добавляет те или иные



продукты или изменяет силу огня до тех пор, пока содержимое кастрюли не придет в соответствие с его представлениями о готовом и вкусном блюде. Легко видеть, что принципы его действий те же, что и шофера, и рабочего у сушильной печи. Различие в действиях определяется лишь особенностями технологических процессов.

### Алгоритмы управления

Во всех наших примерах фигурировал человек. Однако его можно исключить из системы управления. Если закон управления каким-либо объектом точно сформулирован в виде последовательности правил действий (*алгоритма*), то, в принципе, можно создать устройство и составить программу, осуществляющую этот алгоритм без участия человека. Такие системы принято называть *системами автоматического управления*.

Например, для управления сушильной печью достаточно выходной сигнал электрического термометра подать в устройство управления двигателя, связанного с движком реостата. Алгоритм управления ясен: если температура в печи начала падать, то двигатель должен повернуться в одну сторону, увеличивая ток в печи; если же температура растет, то двигатель должен уменьшить ток, повернувшись в противоположную сторону.

Отвлекаясь от физической сущности процессов, протекающих в системах управления, мы можем выделить блоки, общие для этих систем: объект управления, управляющая система, исполнительные органы и органы (устройства), передающие в управляющую систему информацию о целях и результатах управления. Графическое изображение такой системы (*блок-схема*) приведено на рисунке 1. Советуем читателю определить, что именно играет роль того или иного блока в каждом из приведенных примеров.

Описанные системы управления называют *замкнутыми системами*



Рис. 1.

или *системами с обратной связью*. На принципе обратной связи — передаче информации с выхода системы на ее вход — основано регулирование процессов в живых организмах, технических устройствах, экономических и общественных системах.

Чтобы понять роль обратной связи, надо познакомиться с разомкнутыми системами, в которых такая связь отсутствует. Примером может служить автомат по продаже газированной воды.

Как работает этот автомат? Опущенная в отверстие монета проверяется по весу и, падая затем дальше, замыкает электрическую цепь. Включенный ею электромагнит притягивает рычаг, открывающий клапан (кран) на время, достаточное для наполнения стакана водой.

Бывают случаи, когда автомат «не доливает». Он делает это, разумеется не по «злому умыслу», просто за время эксплуатации изменились свойства электромагнита или рычага, и он открывает клапан на более короткий срок.

Попробуем видоизменить автомат так, чтобы возникла обратная связь. Для этого нужно иметь устройство, измеряющее уровень жидкости в стакане. Выходной сигнал этого устройства надо подать в обмотку электромагнита так, чтобы клапан оставался открытым до тех пор, пока не придет сигнал «стакан полон». Такая система будет более гибкой, ей не страшны изменения.

Замкнутые системы автоматического управления появились зна-

чительно позже разомкнутых. Автомат для открывания дверей был создан Героном Александрийским около двух тысяч лет тому назад. Первые же регуляторы с обратной связью — регулятор температуры Дребеля, паровой регулятор уровня Ползунова, регулятор оборотов Уатта — появились в XVII—XVIII столетиях. Они выполняли сравнительно простую работу: поддерживали какой-либо параметр на определенном уровне.

### Управление без обратной связи

По мере развития техники сложность объектов управления неизмеримо возросла. Человеку становится все труднее и труднее управлять созданными им машинами. К примеру, оператору скоростного прокатного стана приходится выполнять до ста (!) операций в минуту — нажимать кнопки, поворачивать штурвалы и рукоятки, передвигать рычаги. Работать в таком темпе без ошибок человек долго не может.

На помощь пришли вычислительные машины. Наиболее типичным примером использования вычислительной машины в разомкнутой системе управления является работа станков с программным управлением. Вот как они работают.

Исходная информация для составления программы обработки заготовки берется из рабочего чертежа. Технолог намечает нужную последовательность обработки, разбивает геометрический контур детали на участки, образуемые прямыми или кривыми линиями, определяет координаты *опорных точек* (мест сопряжения отдельных участков контура, центров дуг и т. д.) и задает параметры линий, соединяющих опорные точки. Вся эта информация кодируется (в двоичной или десятичной системе счисления) и наносится на перфоленгу или перфокарты, которые вводятся в специализированную вычислительную управляющую машину — *интерполятор*.

Технолог задает координаты лишь некоторых (опорных) точек на поверхности детали. Но движение рабочих органов станка необходимо обеспечить в каждый момент времени. Следовательно, информация должна поступать в управляющую систему станка непрерывно в соответствии с законом движения инструмента по каждой координате. Этот поток числовой информации создается интерполятором, вычисляющим положение рабочих органов станка для каждого элемента детали.

Результаты вычислений интерполятора либо непосредственно поступают в управляющую систему станка, либо предварительно записываются на магнитную ленту в так называемом *унитарном коде* (с основанием, равным единице) и лишь затем передаются в управляющую систему.

В унитарном коде каждое число записывается последовательностью единиц в количестве, равном записываемому числу. Например, число 5 запишется так: 11111. Необходимость преобразования двоично-кодированной информации в унитарный код, то есть в последовательность единичных импульсов, определяется конструкцией исполнительных органов станков с программным управлением — *шаговых двигателей*. Шаговый двигатель устроен так, что каждый единичный импульс, поступающий в его обмотку, вызывает поворот вала двигателя на строго определенный угол. Следовательно, перемещение рабочего органа (резца, фрезы и т. п.), связанного с валом двигателя, будет пропорционально числу импульсов, пришедших в управляющее устройство станка.

Преобразование информации в интерполяторе осуществляется таким образом, чтобы число выходных единичных импульсов было равно двоично-кодированной координате контура, а время, за которое выдается это число импульсов, — заданному времени обработки участка контура от одной точки до другой.

Станки с программным управлением, впервые появившиеся в конце 50-х годов, в настоящее время получили повсеместное распространение. Они составляют основу будущих, полностью автоматизированных предприятий.

## Управление с обратной связью

Замкнутые системы управления, использующие вычислительные машины, получили наиболее широкое распространение в химической и металлургической промышленности, в тепловой и атомной энергетике. В замкнутых системах управляющее воздействие вырабатывается с учетом информации о ходе процесса. Устройства, собирающие эту информацию, называют *датчиками*.

Выходной сигнал таких датчиков, как правило, представляет собой некоторую физическую величину, имеющую непрерывный характер. Чтобы цифровая вычислительная машина восприняла информацию датчиков, непрерывная (часто говорят — *аналоговая*) величина должна быть преобразована в цифровую форму в двоичной системе счисления. Поэтому важной составной частью управляющей машины является *аналого-цифровой преобразователь*.

Входной величиной аналого-цифрового преобразователя являются напряжение или ток, угловое или линейное перемещение или положение какого-либо устройства. Зачастую аналоговая величина предварительно преобразуется из своей исходной формы в другую, более удобную для преобразования, например, давление преобразуется в перемещение.

Рассмотрим в качестве примера одну из возможных схем преобразования напряжения в число импульсов. Пусть на вход преобразователя подается напряжение  $U_{вх}$  (рис. 2, а). Преобразователь работает дискретно, то есть измеряет напряжение через определенные промежутки времени (такты), в течение которых входное напряжение можно считать приблизительно постоянным.

Начало каждого такта отмечается *тактовым импульсом*, который испускается генератором тактовых импульсов (рис. 2, б). Тактовый импульс запускает генератор счетных импульсов (рис. 2, в), генератор пилообразного напряжения (рис. 2, г) и включает счетчик.

Пилообразное напряжение и входное напряжение  $U_{вх}$  подаются на два входа *схемы совпадения*, которая в момент их совпадения (рис. 2, д) выдает импульс (рис. 2, е), запирающий счетчик. Число счетных им-

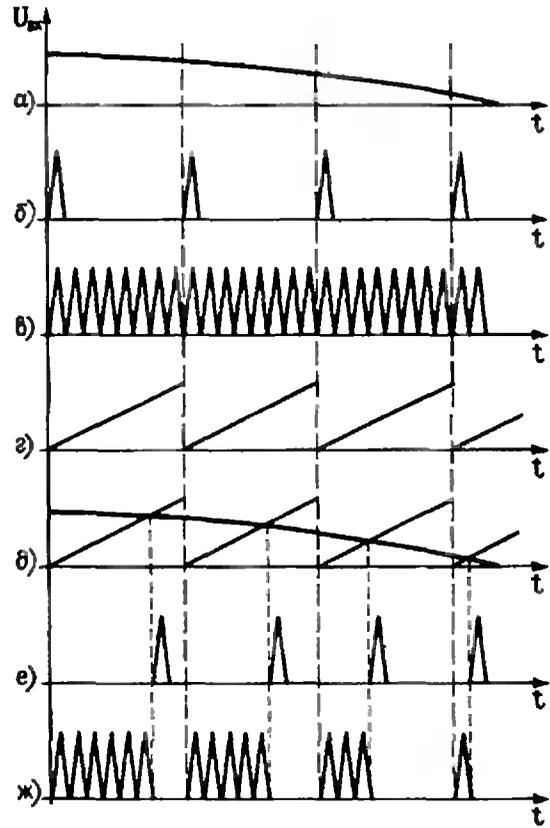


Рис. 2.

пульсов (рис. 2, ж), попавших в счетчик, будет пропорционально промежутку времени между тактовым и запирающим импульсами, а этот промежуток пропорционален величине входного напряжения  $U_{вх}$ .

Таким образом, в этом аналого-цифровом преобразователе осуществляется следующая цепь преобразований: аналоговая величина → напряжение → временной интервал → цифровая форма. Блок-схема такого преобразователя показана на рисунке 3.

Кроме преобразования аналоговой величины в цифровую форму, нередко требуется и обратное преобразование. Дело в том, что вычислительная ма-

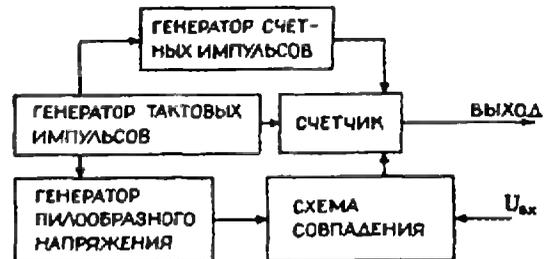


Рис. 3.

шина вырабатывает сигнал в цифровой форме. Если исполнительным органом системы автоматического управления является шаговый двигатель, который управляется цифровым сигналом, то никаких дополнительных преобразований не требуется. Если же в качестве исполнительного органа применяется обычный двигатель (заслонка, регулятор), требующий непрерывного входного сигнала, то нужен *цифро-аналоговый преобразователь*. Такие преобразователи основаны на тех же принципах, что и рассмотренные выше аналого-цифровые.

Блок-схема замкнутой системы управления технологическим процессом с использованием электронной вычислительной машины изображена на рисунке 4. Видно, что, кроме вычислительной машины, система управления содержит довольно много дополнительного оборудования, необходимого для связи машин с управляемым объектом.

Прежде всего, необходимы датчики величин, характеризующих управляемый процесс. К ним относятся:

а) *входные параметры процессов* (давление, температура, расход сырья, потребление тепловой и электрической энергии и т. д.). Эти величины могут быть управляемыми (если

мы можем их изменить с помощью управляющих сигналов) или неуправляемыми (если мы не можем их изменить);

б) *возмущения, нарушающие нормальный ход процессов* (колебания температуры окружающей среды, сетевого напряжения и т. д.);

в) *выходные параметры процессов* (количество и качество основного и побочного продуктов, их температура, состав и т. д.).

Вся информация должна быть преобразована в цифровой вид и введена в вычислительную машину. Кроме этой информации, в машину необходимо ввести *алгоритм управления*, переведенный на машинный язык (*программу управления*). Именно благодаря программе машина сможет рассчитать, какие управляющие воздействия нужны в данной ситуации, чтобы регулируемый процесс шел наивыгоднейшим образом.

### Как составляется алгоритм

Составление алгоритма управления для каждой системы или, точнее, для каждого управляемого процесса, представляет собой сложную задачу. Очень часто не удается получить строгое математическое описание сложных процессов и выразить зависимость между характеризующими их величинами в аналитической форме. Тогда приходится прибегать к экспериментальным методам установления таких зависимостей.

Полученные сведения и описания используются для построения математической модели объекта, которая представляется в виде программы и вводится в управляющую машину. Кроме такой модели, необходимо иметь также точный критерий оптимальности процесса, определяющий цель управления\*). Чаше всего

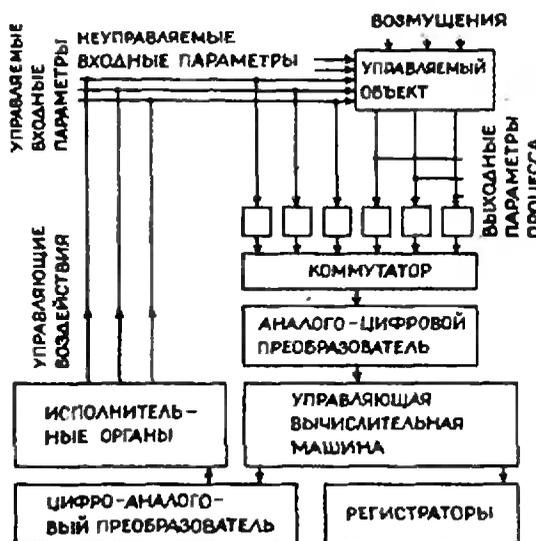


Рис. 4.

\*) Насколько важна четкая формулировка цели управления, читатель может судить по рассказу американского писателя-фантаста Р. Шекли, Страж-птица, М., «Молодая гвардия», 1968 (Библиотека научной фантастики. Т. 16).

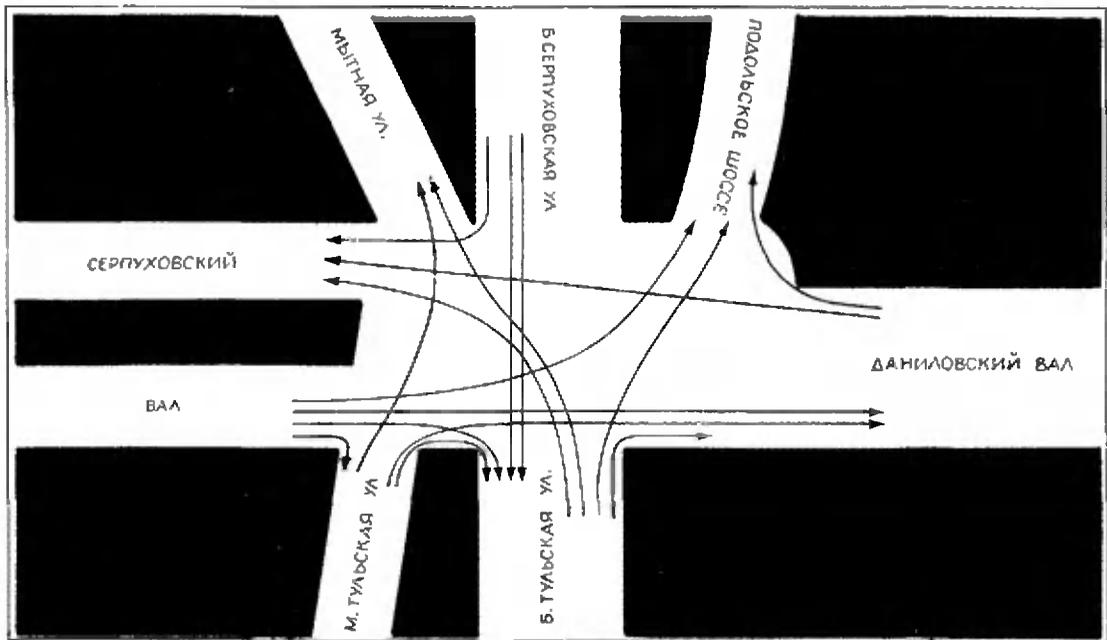


Рис. 5.

целью управления является достижение максимального экономического эффекта. Однако, иногда приходится иметь дело и с другими критериями, например максимальной производительностью, минимальными затратами или кратчайшим сроком.

В ряде случаев управляющий алгоритм удается снабдить «способностью самообучения». Это означает, что программа будет иметь возможность анализировать результаты управляющих воздействий и соответствие выбранной математической модели процесса его реальному течению и вносить требуемые коррективы в математическую модель.

### Система «СТАРТ»

Все читатели, наверное, видели автоматический светофор — простейшую незамкнутую систему. В нем свет переключается в определенном порядке через определенные промежутки времени без учета фактической ситуации на перекрестке. Летом 1972 года на площади Серпуховской заставы в Москве (с довольно сложной схемой движения, см. рис. 5) была включена система автоматического уп-

равления транспортным потоком. От датчиков, расположенных под проезжей частью улиц, выходящих на площадь, в систему подаются сведения о числе машин, движущихся по каждому направлению. Для каждого возможного положения светофоров вычислительная машина подсчитывает число движущихся и простаивающих автомашин и определяет среднее время простоя в расчете на одну машину, после чего выбирает положение светофоров так, чтобы время простоя было минимальным.

В 1974 году в Москве должна быть введена в эксплуатацию система автоматического регулирования транспортных потоков «СТАРТ», которая будет «заведовать» всеми светофорами внутри Садового кольца столицы. Для каждого внутреннего узла схемы можно будет рассчитать число машин, подходящих к этому узлу по различным направлениям.

Алгоритм управления для такой системы включает в себя расчет среднего времени простоя машин; *критерий оптимальности* (условие наиболее выгодного протекания процесса) — минимальность этого времени простоя.

М. А. Гинцбург

## ИЗМЕРЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ЛУНЕ

### Коротко о приборе

Еще в глубокой древности было известно, что Земля действует на магнитную стрелку, как если бы она была гигантским магнитом. И до сих пор ученые не могут ответить на вопрос о причине возникновения земного магнитного поля и законах его изменения во времени (оно медленно меняется на протяжении тысячелетий). Поэтому огромный интерес для науки представляет вопрос о том, есть ли магнитные поля у других космических тел — у Луны, Марса, Венеры и так далее, отличающихся от Земли внутренним строением, размерами и периодом суточного вращения. Из сравнения магнетизма планет и магнетизма Земли можно будет понять, что явилось причиной появления магнитного поля на Земле.

Магнитные поля, правда, очень слабые — примерно в 6000 раз меньше земного, — есть и в межпланетном пространстве. Во всей Солнечной системе от Солнца и до Нептуна нельзя указать места, где бы не было этих слабых полей.

Для измерения магнитных полей на планетах и в межпланетном пространстве почти на всех космических кораблях устанавливаются специальные приборы — так называемые феррозондовые магнитометры. Это один из основных космических приборов.

Феррозондовый магнитометр СГ (название нашего советского прибора этого типа) был установлен на третьем советском искусственном спутнике Земли (он измерял магнитное поле

Земли на высотах в сотни километров), на спутниках «Электрон» (высоты в десятки тысяч километров), на станциях «Венера-4» и «Луна-2», на искусственных спутниках Луны «Луна-10», «Луна-19», на «Луноходе-2», на советских искусственных спутниках Марса «Марс-2» и «Марс-3» и так далее.

На рисунке 1 показано, как устанавливается магнитометр на станции «Луна» (он укрепляется на длинной, 2—3 метра, штанге).

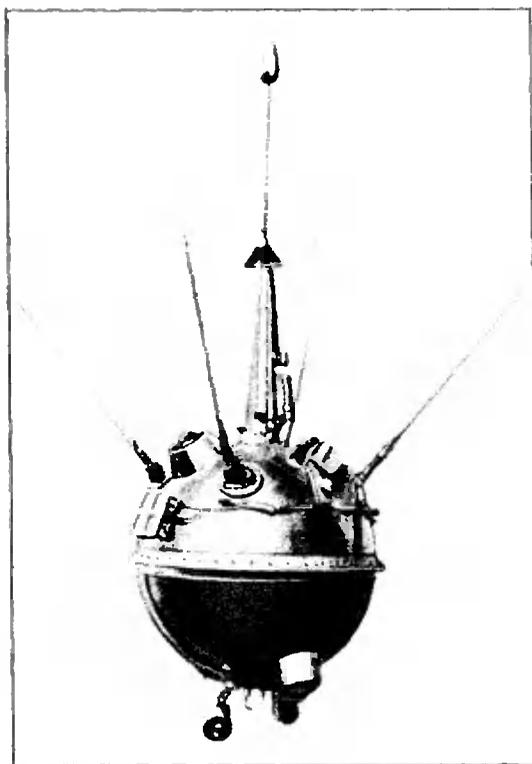


Рис. 1.

Этот прибор, по существу, — специальная разновидность трансформатора.

Обычный трансформатор состоит из двух обмоток, первичной и вторичной, навитых на общий ферромагнитный сердечник \*). В магнитометре СГ сердечником служит тонкая лента из пермаллоя — специального сплава железа (20%) и никеля (80%).

Индукция  $B$  результирующего магнитного поля в сердечнике складывается из двух частей: индукции  $B_0$  поля, создаваемого током намагничивающей катушки, и индукции  $B_\Phi$  поля, создаваемого ориентированными элементарными токами в

самом веществе. Отношение  $\frac{B}{B_0} = \frac{B_0 + B_\Phi}{B_0} = \mu$ , называемое маг-

нитной проницаемостью вещества, для ферромагнетиков много больше единицы (то есть  $B_\Phi \gg B_0$ ) \*\*).

Произведение индукции  $B$  на площадь  $S$  сечения сердечника, перпендикулярного вектору  $B$ , то есть  $BS$ , называется магнитным потоком.

По закону электромагнитной индукции изменение магнитного потока во времени порождает во вторичной обмотке электродвижущую силу индукции, величина которой пропорциональна скорости изменения магнитного потока и числу витков во вторичной обмотке. Если число витков во вторичной обмотке больше, чем в первичной, мы получим в ней напряжение большее, чем в первичной (повышающий трансформатор). Назначение трансформатора — повысить (или понизить) напряжение, поданное в первичную обмотку.

\*) Напомним, что ферромагнитными называют материалы, способные сильно намагничиваться, даже когда они находятся в сравнительно слабом внешнем магнитном поле (в основном это железо, никель и некоторые их соединения и сплавы).

\*\*\*) Величина магнитной проницаемости может сильно меняться при изменении внешнего магнитного поля. В частности, пермаллой отличается тем, что при очень слабых внешних полях значение  $\mu$  резко изменяется с изменением внешнего поля.

В магнитометре, как и в трансформаторе, имеется первичная и вторичная обмотки, навитые на общий пермалловый сердечник (схему магнитометра см. на рис. 8 в Приложении). В первичную обмотку от специального генератора подается переменный ток с частотой 5000 *гц*. Этот ток создает в пермалловом сердечнике переменный магнитный поток  $\Phi$ , а изменение во времени этого потока индуцирует во вторичной обмотке э. д. с. индукции. Величина э. д. с. измеряется специальными приборами, установленными на космическом аппарате, и передается по радио на Землю.

Однако цель магнитометра — не повышение или понижение напряжения, а измерение постоянного во времени слабого внешнего магнитного поля, в котором находится прибор.

Внешнее поле изменяет магнитную проницаемость сердечника и тем влияет на вторичное напряжение (принцип действия магнитометра подробнее описан в Приложении). Сердечники трансформаторов изготавливаются из трансформаторной стали — сплава железа и кремния; слабые внешние магнитные поля не меняют магнитной проницаемости этого материала.

Магнитометр имеет три взаимно перпендикулярные катушки; они измеряют составляющие поля в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Чувствительность прибора очень высока. Так, например, магнитометр, установленный на искусственном спутнике Луны «Луна-10», регистрировал изменения магнитной индукции величиной в 1 гамму. ( $\gamma$  — единица измерения магнитной индукции;  $1\gamma = 10^{-9}$  тл. Магнитное поле у поверхности Земли — 30–60 тысяч гамм, межпланетное поле — 5 $\gamma$ .)

### Первое измерение магнитных полей Луны («Луна-2»)

Станция «Луна-2» была запущена в Советском Союзе 12 сентября 1959 года и достигла Луны 14 сентября 1959



Рис. 2.

года. На ракете был установлен магнитометр СГ.

На рисунке 2 приведены показания всех трех катушек магнитометра при падении ракеты на Луну. Вверху показан модуль (абсолютная величина) поля  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ . Чувствительность прибора составляла  $30\gamma$ . Как видно из рисунка 2, постоянного поля, большего  $100\gamma$ , прибор не обнаружил. Если бы такое поле на поверхности Луны существовало, то при чувствительности при-

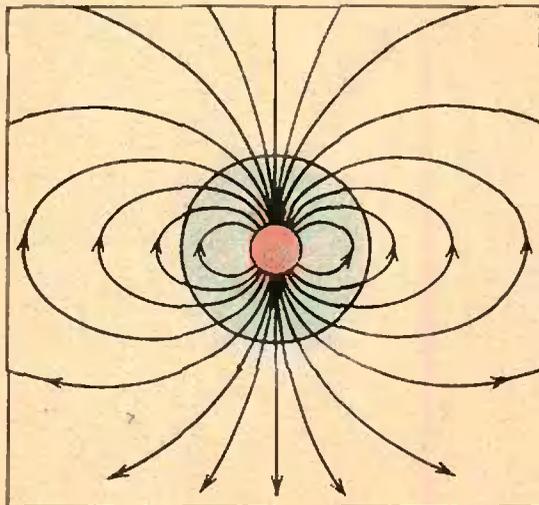


Рис. 3.

бора  $30\gamma$  оно было бы обнаружено. Последнее свое показание прибор передал с высоты  $55$  км над лунной поверхностью. Следовательно, постоянного поля, превышающего  $100\gamma$ , на участке поверхности, куда упала ракета, нет.

В чем значение этого результата?

Во-первых, он важен для понимания внутренней структуры Луны. Земное магнитное поле создается, по-видимому, сложной системой течений расплавленных металлов в ядре Земли (рис. 3). Отсутствие на Луне магнитного поля, близкого по величине к земному, говорит о том, что в ядре Луны нет токов, создающих магнитное поле.

Во-вторых, отсутствие в недрах Луны магнитного поля в корне меняет характер взаимодействия Луны с ионами и электронами, падающими на ее поверхность.

Солнце кроме видимого света, ультрафиолетовых, инфракрасных и рентгеновских лучей испускает также потоки электронов и ионов — так называемый солнечный ветер. Скорость ионов солнечного ветра (на  $95\%$  это ионы водорода — протоны) — от  $300$  до  $700$  км/с в зависимости от условий на Солнце (от его активности). Кроме этого ветра Солнце испускает и частицы гораздо больших энергий, так называемые солнечные космические лучи. Если средняя энергия протонов солнечного ветра

$$W = \frac{mv^2}{2} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-24} (5 \cdot 10^7)^2}{2} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ эрг} \approx 3200 \text{ эв},$$

то средняя энергия частиц, входящих в состав солнечных космических лучей, —  $100 \div 200$  миллионов электрон-вольт. Солнечные космические лучи летят от Солнца во все уголки Солнечной системы, они летят и к Земле. Но на поверхность Земли эти частицы не попадают: магнитное поле Земли на высотах в  $60\text{—}80$  тысяч км от ее поверхности преграждает путь солнечным космическим лучам. Поясним, как это происходит.

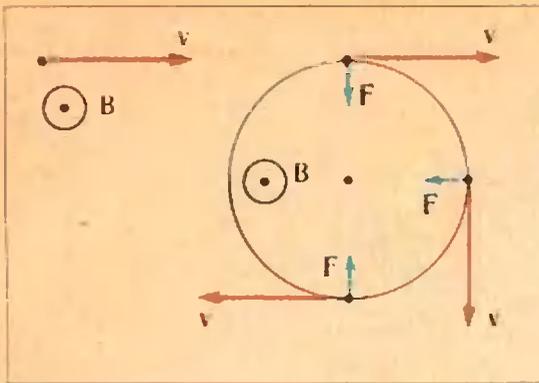


Рис. 4.

Движущиеся ионы — это ток. На ток в магнитном поле действует сила  $F$ , перпендикулярная направлению поля и вектору скорости.

На рисунке 4 показано, как влияет магнитное поле Земли на движение ионов солнечного ветра. Из рисунка видно, что прямолинейная траектория иона при попадании его в магнитное поле Земли искривляется и переходит в окружность.

Однако поток быстрых ионов может исказить магнитное поле, на которое он налетает. Теория показывает, что результат взаимодействия солнечного ветра с магнитным полем Земли зависит от соотношения между кинетической энергией ионов, нахо-

дящихся в единице объема пространства, «заполненного» солнечным ветром, —  $n \frac{mv^2}{2}$  ( $n$  — плотность ионов) и плотностью энергии магнитного поля (энергии, приходящейся на единицу объема пространства), которая пропорциональна величине  $B^2/2$  ( $B$  — величина индукции магнитного поля Земли на данной высоте от ее поверхности). Далеко от Земли, на расстояниях свыше 100 000 км, магнитное поле Земли мало и  $n \frac{mv^2}{2} \gg$

$\gg \frac{B^2}{2}$  — солнечный ветер движется беспрепятственно. На меньших расстояниях  $n \frac{mv^2}{2} < \frac{B^2}{2}$ , траектории ионов искривляются магнитным полем Земли, и на расстояния, меньшие  $\sim 60$  тысяч км от поверхности Земли, солнечный ветер не проникает.

Однако, не будучи в состоянии «пробить» магнитный щит, солнечный ветер деформирует магнитное поле Земли. Область магнитного поля Земли, несколько деформированного солнечным ветром, называется магнитосферой.

За Землей магнитосфера образует магнитный хвост Земли. Искаженные силовые линии поля Земли в этой

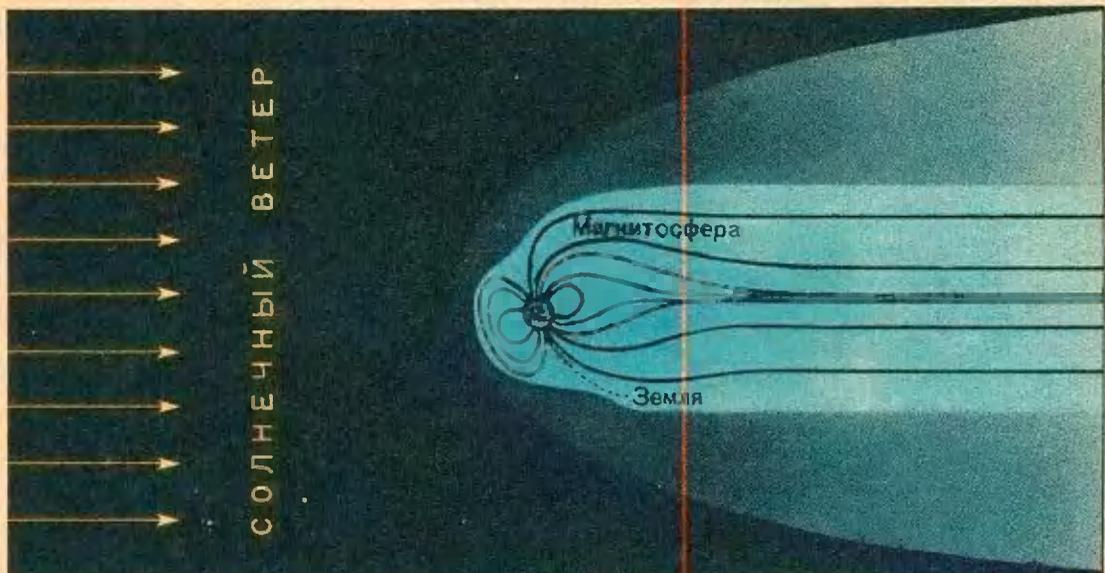


Рис. 5.

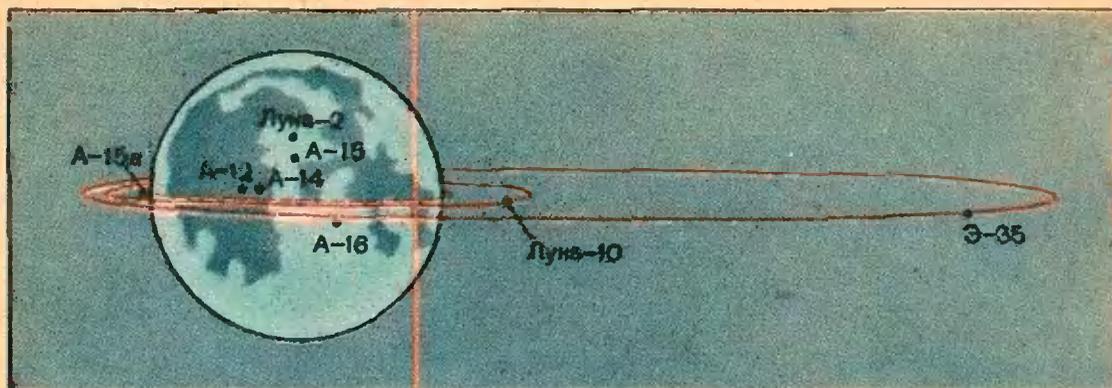


Рис. 6.

области замыкаются на расстояниях порядка 1 миллиона км от ее поверхности. На рисунке 5 область магнитосферы показана голубым цветом (черные линии — магнитные силовые линии).

В области, примыкающей снаружи к границе магнитосферы, магнитное поле солнечного ветра искажено влиянием земного поля. Эта область (на рисунке 5 она более темная, чем магнитосфера) — область «возмущенного» солнечного ветра. Ее ближайшая к Земле внешняя граница проходит на расстоянии  $\sim 100\,000$  км от поверхности Земли. За этой границей существует невозмущенный солнечный ветер (черный цвет на рисунке 5), движущийся от Солнца прямолинейно.

Магнитосфера Земли — это внешний щит толщиной 60 000 км, предохраняющий нас как от губительного действия солнечных космических лучей, так и от менее опасных ионов солнечного ветра. Следующий, внутренний щит образует земная атмосфера.

Магнитные измерения, выполненные на ракете «Луна-2», впервые показали, что на Луне нет сильного магнитного поля. Там нет и второго щита — атмосферы. Поэтому солнечные космические лучи беспрепятственно бомбардируют лунную поверхность; радиационная опасность на Луне намного больше, чем на Земле.

### Измерения на искусственных спутниках Луны

На рисунке 6 показаны орбиты искусственных спутников Луны. На всех этих спутниках были установлены феррозондовые магнитометры.

Чувствительность магнитометра, установленного на первом в истории искусственном спутнике Луны «Луна-10» (он был запущен в Советском Союзе в апреле 1966 года), была 1γ. Магнитная съемка выполнялась вдоль траектории спутника на высотах от 350 до 1017 км над лунной поверхностью.

В 1967 году был выведен на орбиту вокруг Луны американский спутник «Эксплорер-35». На нем был установлен феррозондовый магнитометр, аналогичный нашему СГ.

Результаты измерений «Луны-10» и «Эксплорера-35» подтвердили измерения «Луны-2». Луна не имеет собственного магнитного поля (поля ядра) и ведет себя по отношению к магнитному полю солнечного ветра как немагнитный шар с низкой электропроводностью (что указывает на отсутствие жидкого ядра). Ионы солнечного ветра и космические лучи беспрепятственно достигают ее поверхности.

В 1971 году были запущены искусственные спутники «Луна-19» и «Аполлон-15а» (на рисунке 6 орбита «Аполлона-15а» показана пунктиром; этот спутник был запущен с косми-

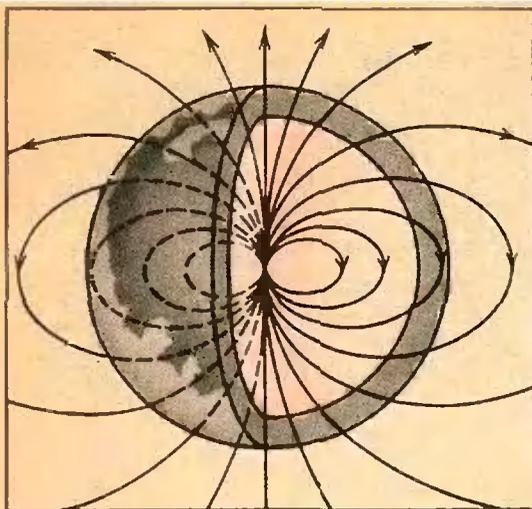


Рис. 7а.

ческого корабля «Аполлон-15»). Эти спутники летали на небольших высотах над лунной поверхностью («Аполлон-15а» —  $110 \div 140$  км) и подтвердили вывод об отсутствии на Луне магнитного поля, создаваемого ядром, с еще большей точностью.

### Намагничивание лунных образцов

Магнитного поля ядра на Луне нет. Но вот на Землю были доставлены образцы горных пород Луны, и измерения показали, что эти образцы намагничены.

Как возникло это намагничивание?

Первое естественное объяснение — гипотеза о существовании у Луны в далеком прошлом магнитного поля, которое впоследствии исчезло. Допустим, что когда-то Луна имела расплавленное ядро, создающее сильное магнитное поле (рис. 7а). Это поле намагнитило горные породы на поверхности, содержащие железо. Затем, при остывании Луны и замедлении ее суточного вращения, магнитное поле ядра исчезло. Однако намагниченные толщи лунной поверхности сохранили свои магнитные свойства — так называемое остаточное намагничивание (рис. 7б).

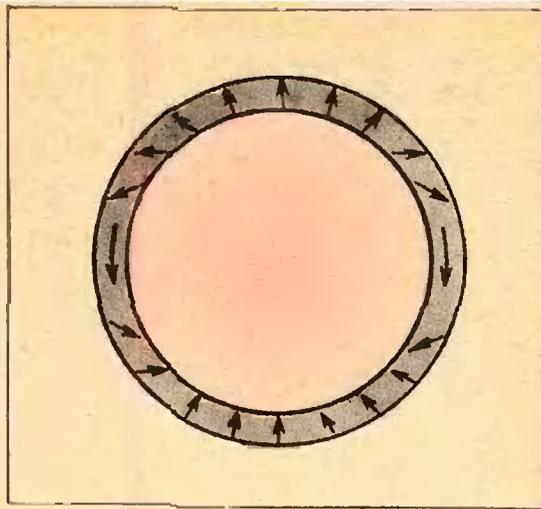


Рис. 7б.

Основную долю остаточного намагничивания порода приобретает при остывании: следовательно, при остывании Луны поле ядра было. По остаточному намагничиванию, зная состав образца, можно судить и о величине магнитного поля, в котором этот образец остывал. С другой стороны, возраст горных пород можно определить по относительно-му содержанию радиоактивных элементов и продуктов их распада\*).

Такие совместные измерения радиоактивности и намагничивания образцов лунной породы показали, что примерно 3,1 миллиарда лет назад на Луне существовало собственное магнитное поле не меньше 1000γ.

### Магнитометры на поверхности Луны («Аполлон-12, -14, -15», «Луноход-2»)

Возникает и новая задача — измерить распределение поля этого остаточного намагничивания по поверхности Луны.

Почему магнитометры, установленные на спутниках Луны, не за-

\*) О радиоактивных методах определения возраста горных пород можно прочитать в статье: Кузнецов В. И. Часы на миллиарды лет. «Квант», 1973, № 4.

регистрировали поля остаточного намагничивания на Луне? Дело в том, что измерения на спутниках Луны для этой цели непригодны. Поле ядра, если оно существует, у поверхности планеты существенно меняется (убывает) на расстояниях порядка радиуса планеты. Поэтому магнитное поле Земли на высоте в 6000 км приблизительно в 8 раз меньше его значения у поверхности и составляет около 4000γ. И если на высотах 100—1000 км над лунной поверхностью магнитного поля не обнаружено, то это означает лишь, что у Луны нет поля ядра, но ничего не говорит о поверхностном магнитном поле.

Поле остаточного намагничивания — поверхностное, оно быстро убывает с высотой, и для его регистрации надо установить магнитометр на поверхности Луны.

Такой эксперимент был осуществлен космонавтами космического корабля «Аполлон-12» 19 ноября 1969 года. Они установили феррозондовый магнитометр, привели его в действие. Прибор продолжал работать много месяцев и в отсутствие космонавтов, а его показания автоматически передавались радиопередатчиком на Землю.

На рисунке 6 черными точками (А-12, А-14, А-15) показаны места установки магнитометров космонавтами кораблей «Аполлон».

На протяжении нескольких месяцев по лунной поверхности двигался самоходный аппарат «Луноход-2», управляемый по радио с Земли. На нем также был установлен феррозондовый магнитометр СГ.

Магнитные измерения на поверхности Луны показали, что поле поверхностного намагничивания в разных участках лунной поверхности имеет разную величину: 38γ («Аполлон-12»), 43γ, 100γ (переносный магнитометр с «Аполлона-14»).

Насколько быстро это поверхностное поле убывает с высотой, показывает следующий пример. Когда спутник, запущенный с ракеты «Аполлон-15», пролетал на высоте 100 км

над участком лунной поверхности, где «налунный» магнитометр «Аполлона-14» зарегистрировал поле в 100γ, он не обнаружил никакого следа этого поля.

За последний, 1973 год, в результате измерений, полученных с помощью корабля «Аполлон-17», наши взгляды на строение Луны претерпели эволюцию. Получено много данных в пользу горячего ( $t > 1000^\circ \text{C}$ ) ядра. Но токов, которые создавали бы магнитное поле, в ядре нет. Магнитное поле Луны обусловлено остаточным намагничиванием коры и, возможно, процессами в слоях под корой, на глубинах 100—200 км.

## Марс, Юпитер, Венера

Советский феррозондовый магнитометр СГ, установленный на станции «Венера-4», измерил магнитное поле ( $\sim 10 \gamma$ ) на расстояниях вплоть до 200 км от поверхности Венеры. Собственного магнитного поля Венеры на этих расстояниях не обнаружено.

Ценную информацию дал магнитометр СГ, установленный на искусственных спутниках Марса «Марс-2» и «Марс-3». На высоте 2000 км над поверхностью Марса обнаружено поле в 27γ, что в 8 раз превышает межпланетное поле. Если последующие измерения подтвердят, что это собственное поле Марса, то таким может быть только поле ядра: поле поверхностного намагничивания на высотах в 1000—2000 км исчезает.

Наряду с измерениями на Марсе на очереди измерение магнитных полей на самой большой планете — Юпитере. По спектру радиоизлучения Юпитера в диапазонах метровых и сантиметровых волн можно с достаточной уверенностью утверждать, что Юпитер обладает сильным магнитным полем — в сотни раз более сильным, чем поле Земли. Природа и характер поля Юпитера еще совсем непонятны. Для измерения магнитных полей на Юпитере на космических кораблях

«Пионер-10» и «Пионер-11», запущенных недавно к Юпитеру, установлены феррозондовые магнитометры. В де-

кабре этого года будут получены результаты измерений кораблем «Пионер-10» поля Юпитера.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Феррозондовый магнитометр

Поле, возникающее в сердечнике, определяется суммарным полем, создаваемым током первичной катушки и тем слабым внешним постоянным (или мало меняющимся во времени) полем, в котором находится магнитометр:  $B = \mu B_{\text{сум}} = \mu(B_1 \sin \omega t + B_0)$ . Магнитная проницаемость материала сердечника—пермаллоя—зависит от величины индукции  $B_{\text{сум}}$ :  $\mu = a - bB_{\text{сум}}^2$  ( $a, b$ —некоторые постоянные коэффициенты,  $a$ —безразмерный, размерность  $b [b] = \frac{1}{[B^2]}$ ). Так что магнитный поток через сечение сердечника, перпендикулярное силовым линиям суммарного магнитного поля, равен

$$\Phi = S(aB_{\text{сум}} - bB_{\text{сум}}^3) = S[a(B_1 \sin \omega t + B_0) - b(B_1 \sin \omega t + B_0)^3] = \\ = S(aB_1 \sin \omega t + aB_0 - bB_1^3 \sin^3 \omega t - 3bB_0 B_1^2 \sin^2 \omega t - 3bB_0^2 B_1 \sin \omega t - bB_0^3).$$

Принцип действия магнитометра: он «выделяет» четвертый член  $(-3bB_0 B_1^2 \sin^2 \omega t) = \frac{3}{2} bB_0 B_1^2 (1 - \cos 2\omega t)$  и по создаваемой им во вторичной обмотке электродвижущей силе измеряет  $B_0$ . Но как подавить остальные слагаемые потока?

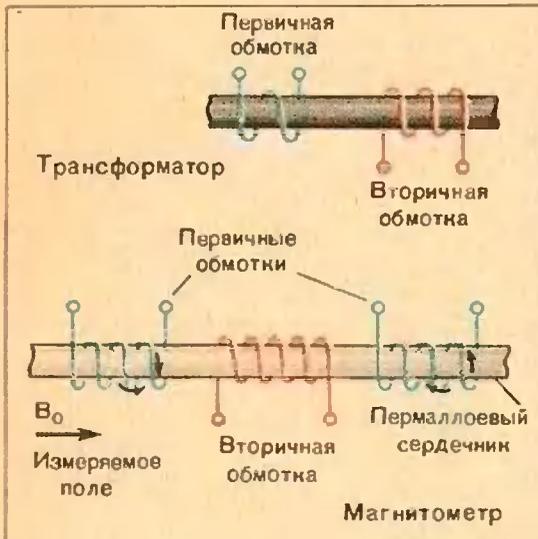


Рис. 8.

пропорциональное как индукции  $B_0$  измеряемого внешнего поля, так и квадрату индукции возбуждающего поля. Это уже не малая величина, к тому же ее можно регулировать, изменяя ток возбуждения.

Почему из ряда ферромагнитных материалов выбран именно пермаллой? Прежде всего, кривая намагничивания пермаллоя содержит нелинейные кубические члены. Кроме того, благодаря высокой магнитной проницаемости пермаллоя, достигающей уже в слабых полях величины  $\mu = 100\,000$ , малые намагничивающие поля создают в сердечнике большую индукцию. Изменение этой индукции во времени вызывает большую э. д. с. во вторичной обмотке, амплитуда которой пропорциональна величине измеряемого поля, а частота равна удвоенной частоте питающего тока. Создаваемый этой э. д. с. ток во вторичной обмотке усиливается специальной схемой, выпрямляется, и его постоянная составляющая служит мерой поля  $B_0$ .

Для этой цели на сердечник надеваются не одна, а две первичные обмотки, намотанные в противоположные стороны (см. рис. 8). Эти обмотки создают в вакууме поля  $B_1 \sin \omega t$  и  $-B_1 \sin \omega t$  соответственно. В сердечнике суммарный поток от двух обмоток  $\Phi_{\text{сум}} = S[a(B_1 \sin \omega t + B_0) - b(B_1 \sin \omega t + B_0)^3] + S[a(-B_1 \sin \omega t + B_0) - b(-B_1 \sin \omega t + B_0)^3] = S(2aB_0 - 2bB_0^3 - 3bB_0 B_1^2 + 3bB_0 B_1^2 \cos 2\omega t)$  имеет частоту в два раза большую, чем частота питающего тока. Соответственно такой прибор называется датчиком второй гармоники.

Если бы прибор работал в линейном режиме (то есть магнитный поток в сердечнике был равен  $\Phi = S[a(B_0 + B_1 \sin \omega t)]$ ), то созданный слабым межпланетным полем магнитный поток  $\Phi_1 = aB_0 S$  было бы трудно регистрировать из-за его малости. Переменный во времени поток  $\Phi_2 = aSB_1 \sin \omega t$  ничего бы для измерения поля не давал, он не зависел бы от измеряемого поля  $B_0$ . Кубическая (то есть нелинейная) зависимость  $\Phi = \Phi(B_{\text{сум}})$  вносит в поток слагаемое  $(3bB_0 B_1^2 \cos 2\omega t)$ ,

Н. Б. Васильев

# Последовательность прыжков

В этой заметке мы решим задачу М190 из «Задачника Кванта» — задачу о блохе, прыгающей по двум прямым. Ее можно решать по-разному. Мы сведем эту задачу к такому вопросу: пусть задано два или несколько перемещений плоскости, оставляющих данную точку  $O$  неподвижной (это могут быть повороты или симметрии); какое преобразование плоскости получится, если последовательно выполнить данные преобразования одно за другим?

Поскольку этот вопрос интересен и сам по себе, а не только в связи с решением задачи про блоху, мы будем иногда отклоняться в сторону и предлагать упражнения, не относящиеся непосредственно к задаче М190.

Вначале напомним формулировку задачи.

На плоскости даны две пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$ . В точке  $A_0$ , находящейся на прямой  $a$  на расстоянии  $l$  от прямой  $b$ , сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки  $B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ , руководствуясь следующими правилами (рис. 1):

1) точки  $A_0, A_1, A_2, \dots$  лежат на прямой  $a$ , точки  $B_0, B_1, B_2, \dots$  — на прямой  $b$ ;

2)  $A_0B_0 = B_0A_1 = A_1B_1 = \dots = B_1A_2 = A_2B_2 = \dots = l$ ;

3) точка  $A_{n+1}$  не совпадает с  $A_n$ , кроме случая, когда  $A_nB_n \perp a$  (и аналогично  $B_{n+1}$  совпадает с  $B_n$  только, если  $B_nA_{n+1} \perp b$ ).

(Условиями 1) — 3) последовательность прыжков определяется однозначно.)

Докажите, что если угол между прямыми  $a$  и  $b$  измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, то есть в некоторый момент она попадет в начальную точку  $A_0$  и затем будет последовательно проходить те же самые точки  $B_0, A_1, B_1, \dots$ , как в начале пути; а если — иррациональным числом, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

Конечно, интересно разобраться не только в том, «зациклится» путь блохи или нет, но и вообще разобраться, как устроена последовательность точек

$$A_0, B_0, A_1, B_1, \dots, A_n, B_n, \dots, \quad (1)$$

например, научиться по номеру  $n$  определять положения точек  $A_n$  и  $B_n$ . В нашем решении будет получен ответ и на этот вопрос. В дальнейшем вместо слова «блоха» мы часто будем употреблять слово «точка».

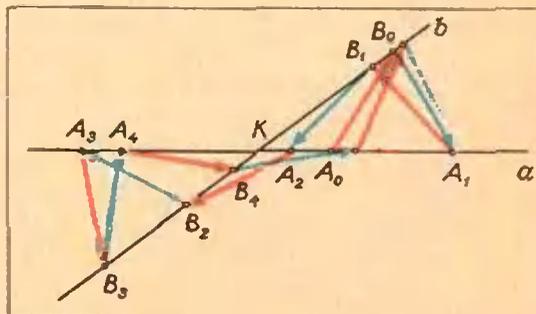


Рис. 1.

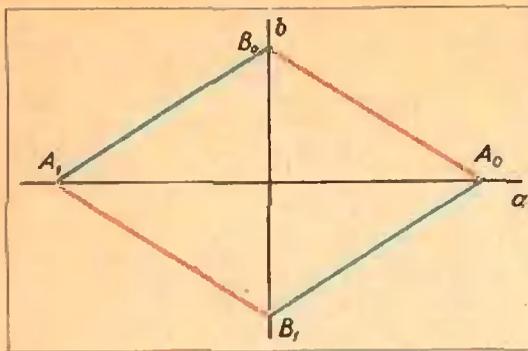


Рис. 2.

### 1. Точка прыгает по двум прямым

Естественно начать с эксперимента: провести две прямые, вооружиться циркулем (еще удобнее — измерителем) и, взяв какую-то точку  $A_0$  в качестве начальной, посмотреть, как выглядит «траектория» блохи. На рисунке 1 построен один такой пример: точки  $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots$  последовательно соединены красными и голубыми отрезками (со стрелками), указывающими путь блохи. Можно повторить такой эксперимент, взяв другой угол между прямыми или другую начальную точку. После нескольких проб становится ясно, что точки  $A_n$  (и  $B_n$ ) попадают то по одну, то по другую сторону от точки пересечения  $K$  прямых  $a$  и  $b$ . Правда, строгой периодичности тут нет: например, на рисунке 1 блоха бывает на каждом из лучей с вершиной  $K$  иногда подряд два раза, иногда — три. И, конечно, эксперимент не позволяет узнать, попадает ли блоха через несколько шагов в начальную точку  $A_0$ : ведь построения мы можем выполнять только приближенно, так что по чертежу мы никак не сможем уловить разницу между рациональным и иррациональным уг-

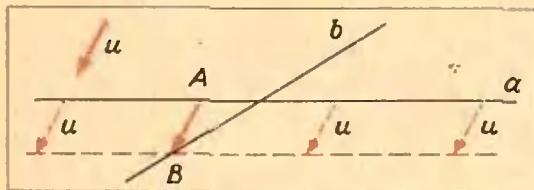


Рис. 3.

лом. (Сразу ясен лишь случай, когда угол — прямой; рис. 2.)

Но зато наши рисунки могут подсказать более простую закономерность, определяющую путь блохи, чем правила 1) — 3), сформулированные в условии задачи.

### 2. Направления прыжков

Последовательные звенья ломаной — траектории блохи — это векторы единичной длины

$$\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{B_0A_1}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1A_2}, \dots \quad (2)$$

(Каждый вектор показывает, каков очередной прыжок.)

Заметим, что если мы знаем вектор

$\vec{u} = \overrightarrow{A_nB_n}$  (пусть он нарисован где-то в стороне, на плоскости), то мы сможем определить, где лежат точки  $A_n$  и  $B_n$ .

Действительно, верна такая

**Лемма.** Пусть  $a$  и  $b$  — пересекающиеся прямые. Для любого вектора  $\vec{u}$  (на плоскости) найдутся две точки  $A$  (на прямой  $a$ ) и  $B$  (на прямой  $b$ ) такие, что вектор  $\overrightarrow{AB}$  равен данному вектору  $\vec{u}$ . Точки  $A$  и  $B$  определяются однозначно.

**Доказательство** (рис. 3). Если мы хотим, чтобы начало вектора лежало на прямой  $a$  и этот вектор равнялся  $\vec{u}$ , то конец его должен попасть на прямую  $a'$ , полученную параллельным переносом прямой  $a$  на вектор  $\vec{u}$  (на рисунке 3 прямая  $a'$  проведена пунктиром). Поэтому точка  $B$  должна лежать в точке пересечения прямой  $b$  с прямой  $a'$ . После этого легко находится и точка  $A$ .

**Упражнение 1.** Даны две точки  $C$  и  $D$  и две прямые  $a$  и  $b$ . Найдите на прямых  $a$  и  $b$  соответственно точки  $A$  и  $B$  такие, чтобы

- середины отрезков  $AC$  и  $BD$  совпадали;
- четырёхугольник  $ABCD$  был трапецией, у которой основание  $AB$  вдвое больше основания  $CD$ .

Возьмем на плоскости точку  $O$  и будем все векторы последовательности

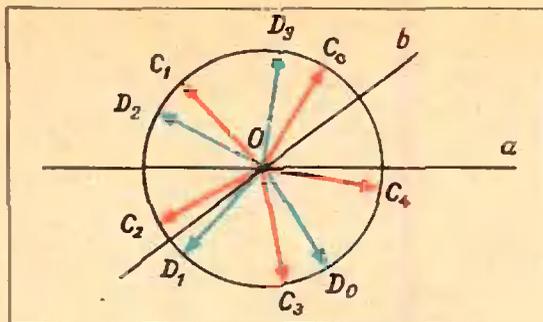


Рис. 4.

(2) откладывать от этой точки. Эти векторы, равные соответственно векторам последовательности (2), обозначим так:

$$\vec{OC}_0, \vec{OD}_0, \vec{OC}_1, \vec{OD}_1, \dots \quad (3)$$

Из леммы следует, что, зная последовательность (3), мы можем восстановить последовательность точек (1).

например, зная  $\vec{OC}_n$ , можно найти и  $A_n$  и  $B_n$ .

На рисунке 4 изображены «направления прыжков» (3) для последовательности, изображенной на рисунке 1. Заметьте, что красные век-

торы  $\vec{OC}_n$  (отвечающие прыжкам с прямой  $a$  на прямую  $b$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) образуют между собой равные углы. Оказывается, что это — общий факт, справедливый для любой последовательности прыжков. Сформулируем его в виде теоремы.

**Теорема.** Если угол между прямыми  $a$  и  $b$  равен  $\gamma$ , то угол меж-

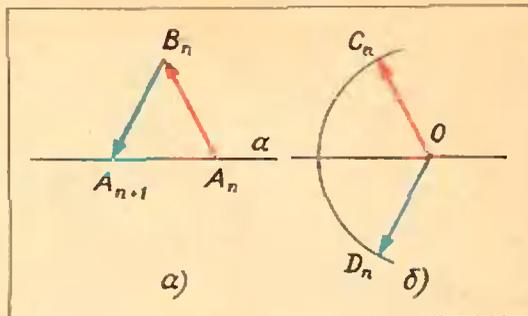


Рис. 6.

ду векторами  $\vec{OC}_n$  и  $\vec{OC}_{n+1}$  равен  $2\gamma$ .

Это — основное соображение в задаче M190. Теорему можно доказать, пользуясь тем, что любые два соседних звена ломаной в последовательности (2) являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника, причем основание этого треугольника попеременно лежит то на прямой  $a$ , то на прямой  $b$ . Основная трудность доказательства связана с тем, что звенья ломаной могут быть по-разному расположены относительно данным прямым. Например, чтобы доказать теорему для  $\gamma = 60^\circ$ , пришлось бы рассмотреть 10 случаев, изображенных на рисунке 5 (остальные получаются из них симметрией относительно точки пересечения прямых  $a$  и  $b$ ). Мы поступим иначе: пользуясь понятиями «преобразование» и «произведение преобразований», мы приведем общее доказательство, охватывающее сразу все случаи.

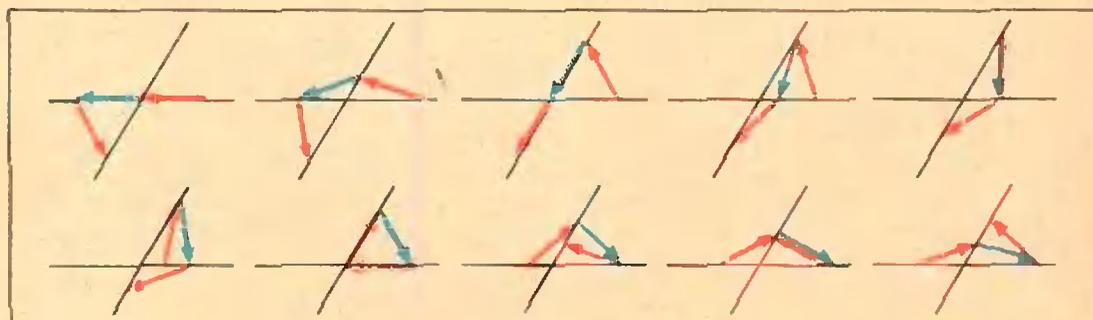


Рис. 5.

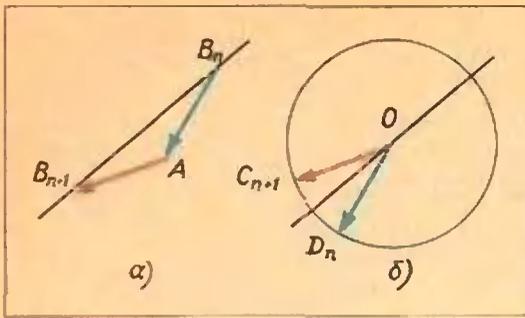


Рис. 7.

### 3. Точка прыгает по окружности

Сравним еще раз рисунки 1 и 4. Выделим из них фрагменты, состоящие из двух последовательных звеньев (те самые «равнобедренные треугольники», о которых шла речь выше; рис. 6, а, б и 7, а, б). Глядя на эти рисунки, легко сформулировать простое правило, по которому строится последовательность (3).

Обозначим через  $p$  и  $q$  прямые, проходящие через точку  $O$  и параллельные соответственно прямым  $a$  и  $b$ ; тогда в последовательности (3)

после вектора  $\overrightarrow{OC_n}$  идет вектор  $\overrightarrow{OD_n}$ , симметричный ему относительно прямой  $p$ ;

после вектора  $\overrightarrow{OD_n}$  идет вектор  $\overrightarrow{OC_{n+1}}$ , симметричный ему относительно прямой  $q$  (здесь  $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

**Упражнение 2.** Проверьте, что это правило в точности соответствует правилам 1)–3) в условии задачи (в том числе в «вырожденных» случаях).

**Упражнение 3.** а) Докажите, что если последовательность (1) попадет в точку  $A_0$  более двух раз, то она будет периодической и при этом некоторая точка  $C_n$  совпадает с  $C_0$ .

б) Приведите пример, когда последовательность попадает в точку  $A_0$  дважды:  $A_1$  совпадает с  $A_0$ , но  $B_1$  уже не совпадает с  $B_0$ .

**Указание.** Для точки  $A$  на прямой  $a$  существует не более двух векторов, начинающихся в  $A$ , кончающихся на прямой  $b$  и имеющих длину 1.

Сформулируем теперь еще раз задачу М190 (вернее, ту задачу, к

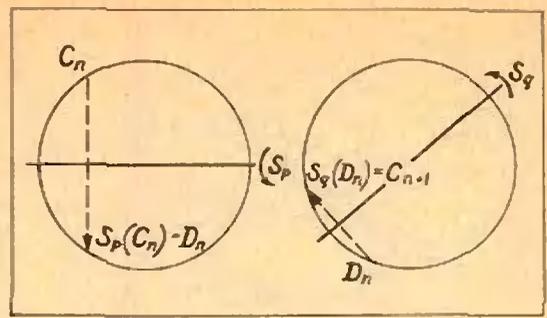


Рис. 8.

которой она свелась), но будем говорить не о преобразованиях векторов в  $\overrightarrow{OC_n}$  и  $\overrightarrow{OD_n}$ , а о преобразованиях их концов — точек, лежащих на единичной окружности.

Пусть  $p$  и  $q$  — две прямые, проходящие через точку  $O$ . Обозначим через  $S_p$  преобразование симметрии относительно прямой  $p$  и через  $S_q$  преобразование симметрии относительно прямой  $q$ . (Мы можем рассматривать эти преобразования, как преобразования всей плоскости на себя; например,  $S_p$  каждой точке  $X$  плоскости ставит в соответствие точку  $S_p(X)$ , симметричную точке  $X$  относительно прямой  $p$ . Но в дальнейшем нам потребуются рассматривать точки на единичной окружности с центром  $O$ . Ясно, что преобразования  $S_p$  и  $S_q$  отображают единичную окружность на себя.) Пусть  $C_0$  — некоторая точка, находящаяся на расстоянии 1 от  $O$ , и

$$C_0, D_0, C_1, D_1, C_2, D_2, \dots \quad (4)$$

— последовательность, определяемая условиями

$$D_n = S_p(C_n), \quad C_{n+1} = S_q(D_n) \quad (5)$$

(рис. 8). Мы должны доказать, что точка  $C_n$  при некотором  $n$  совпадает с  $C_0$  в том и только в том случае, если угол  $\gamma$  между прямыми  $p$  и  $q$  выражается рациональным числом градусов.

Итак, задача о прыжках по двум прямым свелась к задаче о прыжках по окружности.

**Л е о р е м а**, которую мы должны доказать в первую очередь, ут-

верждает, что  $\sphericalangle C_n C_{n+1} = 2\gamma$ . где  $\gamma$  — угол между  $p$  и  $q$ .

#### 4. Произведение преобразований

Наше правило перехода (5) еще упростится, если мы каждые два последовательных прыжка объединим в один: в последовательности

$$C_0, C_1, C_2, \dots \quad (6)$$

каждая последующая точка получается из предыдущей по такому правилу:

$$C_{n+1} = S_q(S_p(C_n)), \quad (7)$$

то есть надо к  $C_n$  применить  $S_p$ , а затем к полученной точке —  $S_q$ .

**Определение.** Пусть  $K$  и  $L$  — два преобразования множества  $M$  на себя. *Произведением* преобразований  $K$  и  $L$  называется такое преобразование  $R$ , которое точке  $X$  из  $M$  ставит в соответствие точку  $L(K(X))$ . Таким образом, произведение преобразований  $K$  и  $L$  — это просто результат последовательного выполнения двух преобразований: сначала  $K$ , а затем  $L$ . Произведение  $R$  обозначается так:  $R = L \cdot K$ . Запись  $K$  и  $L$  именно в таком порядке («справа налево») удобна тем, что для любой точки  $X$  имеет место равенство:

$$R(X) = L \cdot K(X) = L(K(X)). \quad (8)$$

Мы специально уточнили, в каком порядке записываются «сомножители», потому что для умножения преобразований, вообще говоря, не выполняется равенство  $L \cdot K = K \cdot L$  (см. ниже упражнение 4).

Точно так же определяется произведение трех и большего числа преобразований:  $R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$  означает, что нужно сделать сначала  $R_3$ , затем  $R_2$ , затем  $R_1$ . Наконец, запись  $R = (R_1)^n$  означает, что  $R$  — это результат  $n$ -кратного применения преобразования  $R_1$ .

Вернемся к нашим  $S_p$  и  $S_q$  — преобразованиям симметрии относительно прямых  $p$  и  $q$ . Каково будет их произведение? (Сейчас нам удобнее считать, что  $S_p$  и  $S_q$  — преобразования в себе плоскости на себя.) Ясно, что точка  $O$  останется при преобразовании  $S_q \circ S_p$  на месте: она пе-

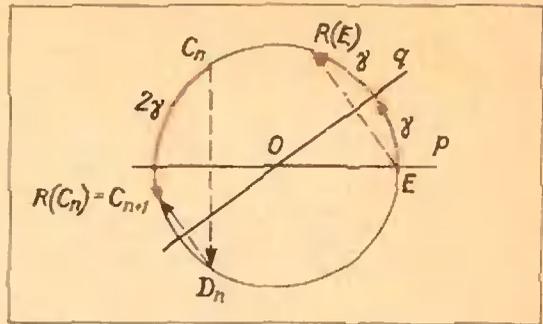


Рис. 9.

реходит в себя и при преобразовании  $S_p$ , и при преобразовании  $S_q$ . Что происходит с остальными точками?

Наглядно это преобразование можно представить себе так. При преобразовании  $S_p$  вся плоскость переворачивается вокруг прямой  $p$  и накладывается на себя «другой стороной». После второго преобразования  $S_q$  — симметрии относительно прямой  $q$  — плоскость снова переворачивается на прежнюю сторону. Ясно, что перемещением плоскости, имеющим неподвижную точку  $O$  и не меняющим «ориентации» плоскости (не переворачивающим плоскость на другую сторону), может быть только поворот вокруг точки  $O$ . Таким образом,  $R = S_q \circ S_p$  — это поворот плоскости на некоторый угол вокруг точки  $O$ . На какой именно угол? Для того чтобы ответить на этот вопрос, достаточно взять одну какую-то точку и посмотреть, что произойдет с ней. Пусть угол от прямой  $p$  до прямой  $q$  равен  $\gamma$  (мы будем отсчитывать углы против часовой стрелки). Возьмем точку  $E$  на прямой  $p$  (рис. 9) и найдем  $R(E)$ . Ясно, что  $S_p(E) = E$ : каждая точка прямой  $p$  при преобразовании  $S_p$  переходит в себя. А затем точка  $E$  попадает на прямую, симметричную прямой  $p$  относительно прямой  $q$ , то есть повернется вокруг точки  $O$  на угол  $2\gamma$ . Итак, если угол от  $p$  до  $q$  равен  $\gamma$ , то  $R = S_q \circ S_p$  — поворот на угол  $2\gamma$ . Отсюда следует наша основная теорема:

$$\sphericalangle C_n C_{n+1} = 2\gamma.$$

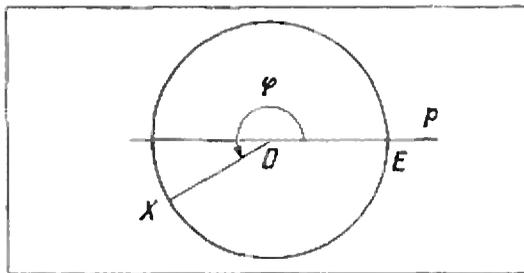


Рис. 10.

**У п р а ж н е н и е 4.** Убедитесь в том, что преобразование  $S_p \circ S_q$  — поворот на угол  $(-2\gamma)$ , то есть поворот на  $2\gamma$  по часовой стрелке (см. синие отрезки на рис. 4). Таким образом, если угол  $\gamma$  отличен от нулевого или прямого угла, то  $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$ .

### 5. Запись поворотов и симметрий окружности

Вычислять произведение преобразований можно и формально. Для этого нужно ввести координаты. Поскольку нас интересуют только перемещения плоскости, имеющие данную точку  $O$  неподвижной, мы можем вместо преобразований плоскости говорить об отображениях единичной окружности с центром  $O$  на себя — о поворотах и симметриях.

Координату окружности введем так. Выберем начало отсчета  $E$  — одну из точек пересечения прямой  $p$  с единичной окружностью. Каждой точке  $X$  окружности поставим в соответствие величину угла  $EOX$ , отсчитываемого от  $OE$  против часовой стрелки и измеряемого в градусах (рис. 10); при этом точке  $X$  соответствует множество чисел

$$\varphi, \varphi \pm 360^\circ, \varphi \pm 2 \cdot 360^\circ, \dots$$

— числом, отличающимся на целое кратное  $360^\circ$ , соответствует одна и та же точка окружности.

**У п р а ж н е н и е 5.** а) Преобразование  $S_p$  — симметрия относительно прямой  $p$  — задается формулой  $S_p(\varphi) = -\varphi$ .

б) Преобразование  $R^\alpha$  — поворот на угол  $\alpha$  (против часовой стрелки) — задается формулой  $R^\alpha(\varphi) = \varphi + \alpha$ .

в) Пусть прямая  $q$  составляет угол  $\gamma$  с прямой  $p$ . Преобразование  $S_q$  мы будем далее обозначать через  $S_\gamma$ , чтобы явно указывать, какой угол образует прямая  $q$  с «начальной» прямой  $p$ . (В частности, вместо  $S_p$  мы будем писать  $S_0$ .) Тогда

$$S_\gamma(\varphi) = 2\gamma - \varphi.$$

**З а м е ч а н и е.** Конечно,  $R^{\alpha+360^\circ n} = R^\alpha$  и  $S_{\gamma+180^\circ n} = S_\gamma$  для любого целого

го  $n$  (угол, который составляет прямая  $q$  с прямой  $p$ , определен с точностью до прибавления любого кратного  $180^\circ$ ). Это как раз соответствует тому, что  $\varphi$  определено с точностью до прибавления целого кратного  $360^\circ$ .

**У п р а ж н е н и е 6.** а) Докажите, что  $R^\gamma \circ S_0 \circ R^{-\gamma} = S_\gamma$ . Каков геометрический смысл этого равенства?

б) Докажите, что  $S_{\gamma_1} \circ S_{\gamma_2} = R^{2\gamma_1 - 2\gamma_2}$  (отсюда, в частности, следует, что  $S_0 \circ S_\gamma = R^{-2\gamma}$  и  $S_\gamma \circ S_0 = R^{2\gamma}$ ).

в) Проверьте, что  $R^\alpha \circ R^\beta = R^{\alpha+\beta}$ .

г) Докажите, что  $S_\gamma \circ R^\beta = S_{\gamma - \frac{\beta}{2}}$ .

д) Чему равно произведение  $R^\alpha \circ S_\gamma$ ?

Решим для примера задачу г). Пусть точке  $X$  соответствует число  $\varphi$ . Тогда точке  $S_\gamma \circ R^\beta(X)$  соответствует число

$$\begin{aligned} S_\gamma(R^\beta(\varphi)) &= S_\gamma(\varphi + \beta) = 2\gamma - (\varphi + \beta) = \\ &= 2\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) - \varphi. \end{aligned}$$

поэтому, как мы знаем (упражнение 5 в)),

$$S_\gamma \circ R^\beta = S_{\gamma - \frac{\beta}{2}}.$$

**У п р а ж н е н и е 7.** Докажите, что

$$\text{а) } (R^\alpha)^n = R^{\alpha n}$$

б)  $(S_\gamma)^2 = I$ , где  $I$  — тождественное преобразование ( $I$  оставляет все точки на месте).

### 6. Окончание решения задачи про блоху

Итак, мы выяснили, что в последовательности (6) точек каждая следующая получается из предыдущей поворотом на угол  $2\gamma$ , где  $\gamma$  — угол между прямыми  $p$  и  $q$ . Поэтому  $C_n$  получается из  $C_0$  поворотом на угол  $2\gamma n$ . Для того чтобы  $C_n$  и  $C_0$  совпали, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота был целым, кратным  $360^\circ$ . Ясно, что если

$$2\gamma n = 360^\circ k, \text{ где } k \text{ — целое,}$$

то  $\gamma$  измеряется рациональным числом градусов. Обратно, если  $\gamma = \frac{p}{q}$

градусов, то для  $n = 180^\circ q$  получим

$$2\gamma n = 360^\circ p, \text{ где } p \text{ — целое,}$$

поэтому  $C_n = C_0$ .

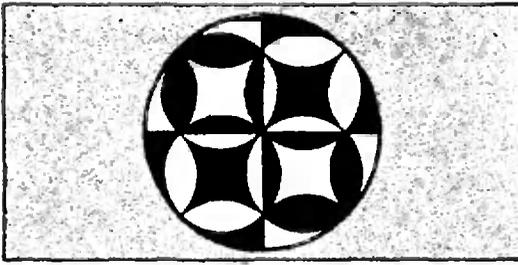


Рис. 11.

В заключение еще раз предлагаем вам поупражняться в «прыжках, поворотах и симметриях».

### 7. Несколько упражнений

Хотя большинство вопросов сформулировано ниже для конкретных чисел, очень советуем вам попытаться отвечать на аналогичные вопросы в общем виде (для произвольных значений параметров). Иногда это даже проще.

8. Пусть угол  $\gamma$  между прямыми  $a$  и  $b$  равен  $60^\circ$ , а угол отрезка  $A_0B_0$  с лучом  $KA_0$  —  $7^\circ$ . Какой угол будет составлять с этим лучом отрезок  $A_{100}B_{100}$ ? Отрезок  $B_{100}A_{101}$ ?

9. Пусть угол  $\gamma$  равен одному радиану и  $KA_0=1$ . Выясните, принадлежит ли точка  $A_{1873}$  лучу  $KA_0$  или находится на другой половине прямой  $a$ .

10. Докажите, что период траектории блоха (наименьшее  $n > 1$ , при котором  $A_n = A_0$ ) зависит только от угла  $\gamma$ , но не зависит от того, из какой точки стартует блоха. Чему равен этот период, если  $\gamma = 72^\circ$ ? Попробуйте проверить этот факт «экспериментально».

11. Пусть  $\gamma = 37^\circ$ . Сколько раз подряд точки последовательности  $A_0, A_1, A_2, \dots$  будут встречаться на луче  $KA_0$  (укажите наибольшее и наименьшее значения)?

Если вы захотите решить в общем виде и следующие упражнения — про узоры в круге, — то вам придется, вероятно, воспользоваться той небольшой теорией, которая содержится в упражнениях 6 и 7. Под узором мы понимаем просто некоторое множество точек  $M$ , выделенное внутри единичного круга: можно считать, что круг белый, а это множество

выкрашено черной краской. Мы говорим, что узор переходит сам в себя при преобразовании  $P$ , если  $P(M) = M$ .

12. Придумайте узор, который

а) переходит в себя при повороте на  $180^\circ$ , но не имеет ни одной оси симметрии;

б) имеет ось симметрии, но не переходит в себя ни при каком повороте (отличном от тождественного преобразования);

в) переходит в себя при повороте на  $60^\circ$  и не имеет оси симметрии;

г) переходит в себя при повороте на  $60^\circ$  и имеет ось симметрии; какое наименьшее число осей симметрии он может иметь?

13. а) Какое количество осей симметрии имеет правильный  $n$ -угольник? Узор на рисунке 11?

б) Узор переходит в себя при повороте на  $48^\circ$ . Можно ли утверждать, что он перейдет в себя при повороте на  $12^\circ$ ? На  $18^\circ$ ?

г) Узор имеет две оси симметрии, образующие угол  $66^\circ$ . Какое наименьшее число осей симметрии он может иметь? Перечислите все значения углов, при повороте на которые этот узор заведомо переходит в себя.

# Поверхностное натяжение чертит гиперболу

И. И. Воробьев

Один из методов измерения коэффициента поверхностного натяжения жидкости основан на поднятии столбика смачивающей жидкости в капилляре. Однако не всегда под рукой имеются капиллярные трубочки и микроскоп для определения их внутреннего диаметра.

Оказывается, капилляры вполне можно заменить двумя стеклянными пластинками. Опустите пластинки в сосуд с водой и постепенно сближайте их параллельно друг другу. Вода поднимается между пластинками — ее втягивает сила поверхностного натяжения (рис. 1).

Легко рассчитать коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  по высоте подъема воды  $y$  и зазору между пластинками  $d$ . Сила поверхностного натяжения  $F = 2\sigma L$ , где  $L$  — длина пластинки (двойка появилась из-за того, что вода соприкасается с обеими пластинками). Эта сила удерживает слой воды массы  $m = \rho Ldy$ ,

где  $\rho$  — плотность воды. Таким образом,

$$2\sigma L = \rho Ldyg.$$

Отсюда можно найти коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho g dy. \quad (1)$$

Но интереснее сделать так: с одного конца сжать пластинки вместе, а с другого оставить небольшой зазор (рис. 2). Вода поднимется и образует между пластинками удивительно правильную поверхность (конечно, если стекло чистое и сухое).

Нетрудно сообразить, что сечение этой поверхности вертикальной плоскостью — гипербола. В самом деле, достаточно в формулу (1) вместо  $d$  подставить новое выражение для зазора в данном месте. Из подобия соответствующих треугольников (см. рис. 2)

$d = D \frac{x}{L}$ . Здесь  $D$  — зазор на конце,

$L$  — по-прежнему длина пластинки, а  $x$  — расстояние от места соприкосновения пластинок до места, где определяется зазор и высота уровня. Таким образом,

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho g y D \frac{x}{L},$$

или

$$y = \frac{2\sigma L}{\rho g D} \cdot \frac{1}{x}. \quad (2)$$

Уравнение (2) действительно является уравнением гиперболы.

Для проведения опыта можно взять пластинки размером  $10 \times$

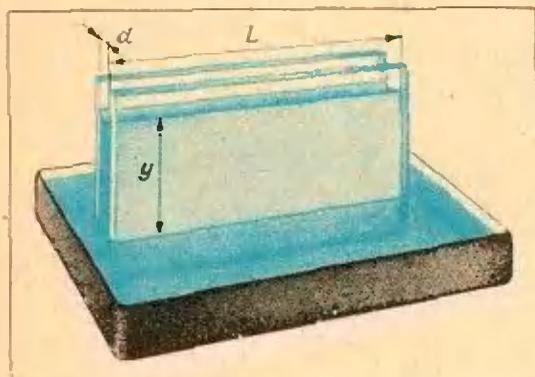


Рис. 1.

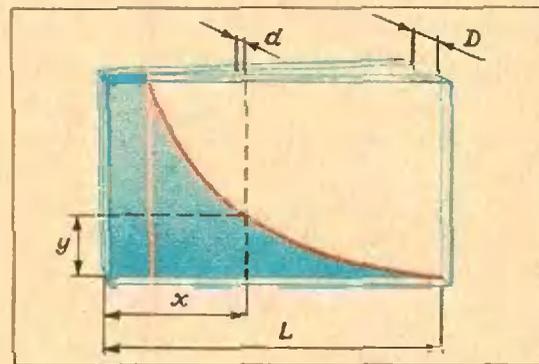


Рис. 2.

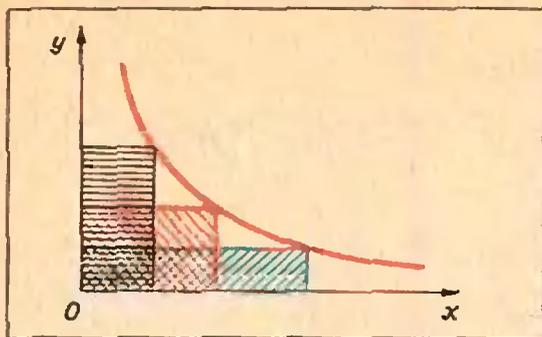


Рис. 3.

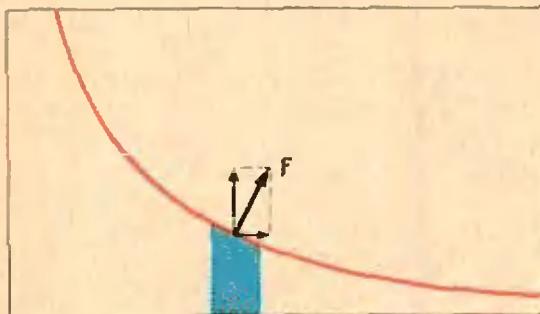


Рис. 4.

× 20 см, зазор на конце установить в толщину спички, а в качестве сосуда использовать ванночку для проявления фотобумаги. Для удобства измерений на внешнюю сторону одной из пластинок наклейте миллиметровую бумагу.

Имея график, начерченный водой, можно проверить, действительно ли получилась гипербола. Для проверки воспользуйтесь тем, что площади всех прямоугольников под гиперболой (рис. 3) одинаковы.

Если у вас есть термометр для измерения температуры воды, то можно исследовать зависимость поверхностного натяжения от температуры. Можно также изучить влияние примесей.

В заключение подумайте над таким вопросом: сила поверхностного натяжения  $F$  направлена перпендикулярно линии соприкосновения воды со стеклом (рис. 4). Вертикальная составляющая этой силы уравновешена силой тяжести столбика воды. Чем же уравновешена ее горизонтальная составляющая?

## «Эффект Паули»

Вольфганг Паули был сто-процентным теоретиком. Его неспособность обращаться с любым экспериментальным оборудованием вошла у друзей в поговорку. Утверждали даже, что ему достаточно просто войти в лабораторию, чтобы в ней что-нибудь сразу же переставало работать. Это мистическое явление окрестили «эффектом Паули» (в отличие от знаменитого «принципа Паули» в квантовой теории). Из документально зарегистрированных проявлений эффекта Паули самым поразительным, несомненно, является следующий. Однажды в лаборатории Джеймса Франка в Геттингене произошел настоящий взрыв, разрушивший дорогую установку. Время этого ЧП было точно зафиксировано. Как потом оказалось, взрыв произошел именно в тот момент, когда поезд, в котором Паули следовал из Цюриха в Копенгаген, остановился на 8 минут в Геттингене.

*Из книги  
«Физики  
продолжают  
шутить»*



# Механика помогает геометрии

М. Б. Балк, Н. А. Григорьев

*... Я счел нужным написать тебе и... изложить некоторый особый метод, при помощи которого ты получишь возможность при помощи механики находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем.*

Архимед. «Послание к Эратосфену.  
О механических теоремах».

Со времен Архимеда простейшие понятия механики — и, в первую очередь, понятие о центре тяжести системы материальных точек — неоднократно и с большим успехом привлекались для доказательства геометрических теорем. Так, с помощью механических соображений Архимед впервые доказал теорему о трех медианах треугольника, нашел формулу для вычисления объема шара. Впоследствии механические соображения использовались для вычисления объемов различных тел вращения, нахождения геометрических мест точек, доказательства неравенств и для решения многих других задач из геометрии и алгебры\*).

Эта статья написана по материалам занятий, проведенных с учащимися X классов в Смоленском городском физико-математическом кружке (19 октября 1972 г.) и в Ивановской ЮМШ (1 декабря 1972 г.). В ней мы расскажем об одной механической теореме, принадлежащей известному французскому математику Лагранжу (1736—1813), и покажем, как эта теорема позволяет сравнительно легко решать трудные задачи из области элементарной геометрии. Как мы увидим, эта теорема по су-

ществу является прямым следствием из теоремы Пифагора.

## Центр тяжести

Пусть имеются (см. рис. 1) две материальные точки (точечные массы):  $A$  массы  $m_1$  (будем писать короче так:  $(A, m_1)$ ) и  $B$  массы  $m_2$  ( $(B, m_2)$ ).

Центр тяжести  $C$  двух материальных точек  $(A, m_1)$  и  $(B, m_2)$  — это точка, расположенная на отрезке  $AB$  и удовлетворяющая следующему соотношению («правило рычага» Архимеда):

$$m_1 \cdot AC = m_2 \cdot CB.$$

Если в точке  $C$  поместить массы обеих материальных точек  $m_1$  и  $m_2$ , то возникающую при этом материальную точку  $(C, m_1 + m_2)$  условимся называть материальным центром точек  $(A, m_1)$  и  $(B, m_2)$ . Материальный центр трех материальных точек  $(A_1, m_1)$ ,  $(A_2, m_2)$ ,  $(A_3, m_3)$  (рис. 2) определяется так: сначала следует найти материальный центр  $(C, m_1 + m_2)$  точек  $(A_1, m_1)$  и  $(A_2, m_2)$ , а затем — материальный центр  $(Z, m_1 + m_2 + m_3)$  точек  $(C, m_1 + m_2)$  и  $(A_3, m_3)$ . Точка  $Z$  будет центром тяжести системы трех материальных точек  $(A_1, m_1)$ ,  $(A_2, m_2)$ ,  $(A_3, m_3)$ .

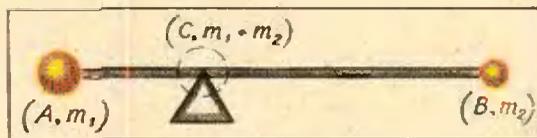


Рис. 1.

\* См. также М. Б. Балк, Геометрические приложения понятия о центре тяжести, М., Физматгиз, 1959 («Библиотека математического кружка», выпуск 9), и В. А. Успенский, Некоторые приложения механики к математике, М., Физматгиз, 1958 («Популярные лекции по математике», выпуск 27).

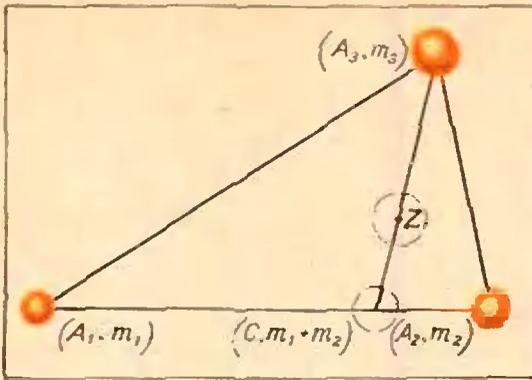


Рис. 2.

Аналогичным образом определяются материальный центр и центр тяжести системы из любого числа ( $n$ ) материальных точек\*).

Теперь решим одну задачу.

**Задача 1.** В треугольнике  $ABC$  (рис. 3) длины сторон  $BC, CA$  и  $AB$  равны соответственно  $a$  см,  $b$  см и  $c$  см. Поместим в вершины  $A, B, C$  массы  $a$  г,  $b$  г и  $c$  г соответственно. Найти центр тяжести этих трех материальных точек.

Обозначим через  $Z$  центр тяжести материальных точек  $(A, a), (B, b), (C, c)$ , а через  $C_1$  — центр тяжести материальных точек  $(A, a)$  и  $(B, b)$ . Тогда

$$a \cdot AC_1 = b \cdot C_1B,$$

откуда

$$AC_1 : C_1B = b : a = AC : CB.$$

Отсюда следует, что  $CC_1$  — биссектриса угла  $C$ . Заменяем точки  $(A, a)$  и  $(B, b)$  их материальным центром  $(C_1, a + b)$ . Тогда центр тяжести  $Z$  должен оказаться на отрезке  $CC_1$ . Точно так же можно убедиться в том, что точка  $Z$  должна оказаться на биссектрисе  $AA_1$ . Следовательно,  $Z$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ .

Отметим здесь одно полезное свойство центра тяжести.

\* Можно доказать, что положение центра тяжести не зависит от нумерации точек, то есть что данное нами определение «корректно».

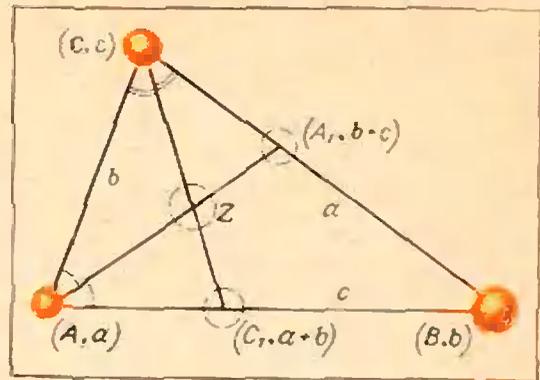


Рис. 3.

Пусть  $Z$  — центр тяжести  $n$  материальных точек  $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ , расположенных на плоскости по одну и ту же сторону от некоторой прямой  $\alpha$  (рис. 4). Пусть  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и  $z$  — расстояния от точек  $A_1, A_2, \dots, A_n, Z$  до прямой  $\alpha$ . Тогда

$$z = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (1)$$

В справедливости этой формулы при  $n = 2$  легко убедиться, воспользовавшись правилом рычага. Затем легко доказать формулу (1) при  $n = 3$ , сведя этот случай к случаю  $n = 2$ . Для произвольного  $n$  формула (1) доказывается методом математической индукции. Попробуйте провести это доказательство самостоятельно.

### Момент инерции

Понятие «момент инерции» было введено Леонардом Эйлером (1707—

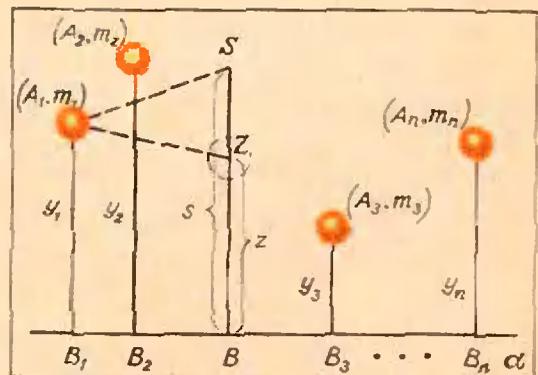


Рис. 4.

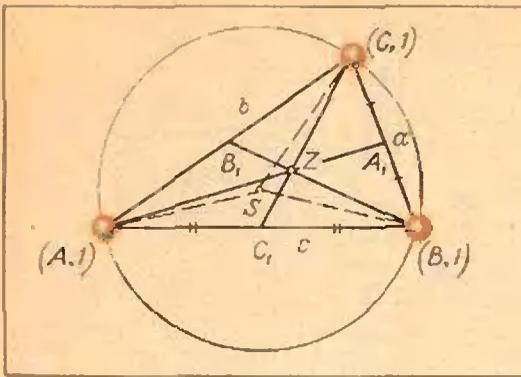


Рис. 5.

1783) более 200 лет тому назад. Пусть имеется система из  $n$  материальных точек  $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ , и пусть выбрана еще некоторая точка  $S$ . Моментом инерции данной системы точек относительно точки  $S$  называется величина

$$J_S = m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2 + \dots + m_n \cdot SA_n^2 \quad (2)$$

(сумма произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний от точки  $S$ ). Короче записывают формулу (2) так:

$$J_S = \sum_{i=1}^n m_i \cdot SA_i^2.$$

**Задача 2.** Около треугольника  $ABC$  со сторонами  $a, b, c$  описана окружность (рис. 5). Обозначим через  $Z$  точку пересечения медиан треугольника, через  $S$  — центр описанной окружности. Вычислить моменты инерции системы материальных точек  $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$  относительно точки  $Z$  и относительно точки  $S$ .

Пусть  $AA_1, BB_1, CC_1$  — медианы треугольника,  $Z$  — точка их пересечения. Тогда

$$\begin{aligned} J_Z &= 1 \cdot ZA^2 + 1 \cdot ZB^2 + 1 \cdot ZC^2 = \\ &= \frac{4}{9} (AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2), \quad (3) \end{aligned}$$

$$J_S = 1 \cdot SA^2 + 1 \cdot SB^2 + 1 \cdot SC^2 = 3R^2,$$

где  $R = \frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}$  ( $S_{\triangle ABC}$  находится по формуле Герона).

### Теорема Лагранжа

В 1783 году Лагранж обратил внимание на справедливость следующего утверждения.

Пусть  $J_S$  — момент инерции системы материальных точек  $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$  относительно произвольной данной точки  $S$ ,  $J_Z$  — момент инерции той же системы относительно ее центра тяжести  $Z$ . Тогда

$$J_S = J_Z + M \cdot SZ^2, \quad (4)$$

где

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

**Доказательство\*).** Пусть  $\alpha$  — такая прямая, что все точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  лежат по одну сторону от нее и  $\alpha \perp SZ$  (см. рис. 4). Пусть  $B_1, B_2, \dots, B_n, B$  — проекции точек  $A_1, A_2, \dots, A_n, Z$  на прямую  $\alpha$ ;  $A_1B_1 = y_1, A_2B_2 = y_2, \dots, A_nB_n = y_n, BZ = z, BS = s$ . Из трапеций  $A_1B_1BZ$  и  $A_1B_1BS$  имеем:

$$\begin{aligned} SA_1^2 - ZA_1^2 &= (y_1 - s)^2 - (y_1 - z)^2 = \\ &= [(y_1 - z) - (s - z)]^2 - (y_1 - z)^2. \end{aligned}$$

Упростив правую часть и умножив обе части на  $m_1$ , получим:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot SA_1^2 - m_1 \cdot ZA_1^2 &= m_1 \cdot SZ^2 - \\ &- 2(s - z)(m_1 y_1 - m_1 z). \end{aligned}$$

\* Мы ограничиваемся случаем, когда все данные материальные точки лежат в одной плоскости; однако утверждение справедливо и при произвольном расположении точек в пространстве (см. упомянутую выше книгу: М. Б. Балк, Геометрические приложения понятия о центре тяжести, с. 75—76).

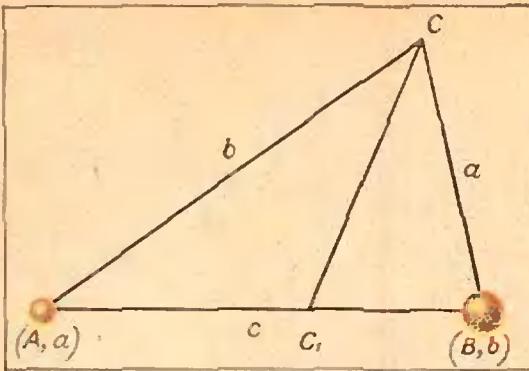


Рис. 6.

Аналогично

$$m_2 \cdot SA_2^2 - m_2 \cdot ZA_2^2 = m_2 \cdot SZ^2 - 2(s-z)(m_2 y_2 - m_2 z),$$

$$m_n \cdot SA_n^2 - m_n \cdot ZA_n^2 = m_n \cdot SZ^2 - 2(s-z)(m_n y_n - m_n z).$$

Складывая почленно эти равенства и учитывая определение момента инерции (2) и формулу (1), получим требуемое равенство:

$$J_S - J_Z = M \cdot SZ^2.$$

**Задача 3.** Ребро правильного тетраэдра  $SABC$  равно  $a$ . Вычислить радиус  $R$  описанного около тетраэдра шара.

Поместим в четырех вершинах тетраэдра массы по 1 грамму. Тогда центр тяжести образовавшихся четырех материальных точек совпадет с центром  $Z$  описанного шара. Имеем  $J_S = 3a^2$ ,  $J_Z = 4R^2$ ,  $M = 4$  и по формуле (4) получаем:  $3a^2 = 4R^2 + 4R^2$ , откуда  $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

**Задача 4.** Зная длины  $a, b, c$  сторон треугольника  $ABC$ , вычислить длину биссектрисы  $CC_1$  (рис. 6).

Поместим в точки  $A$  и  $B$  такие массы, чтобы точка  $C_1$  оказалась их центром тяжести. Для этого заметим, что по известному свойству биссектрисы  $AC_1 : C_1B = AC : CB$ , то есть  $a \cdot AC_1 = b \cdot C_1B$ . Значит, в точ-

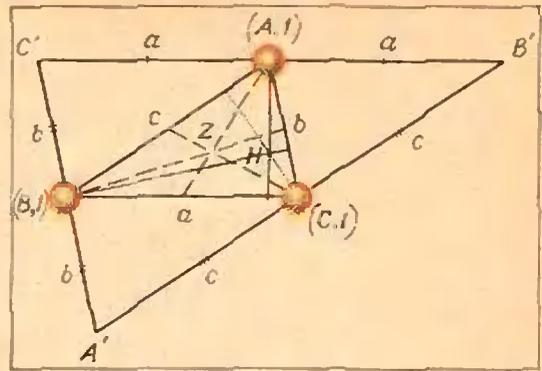


Рис. 7.

ку  $A$  надо поместить массу в  $a$  граммов, а в точку  $B$  —  $b$  граммов, центром тяжести материальных точек  $(A, a)$  и  $(B, b)$  будет точка  $C_1$ .

По формуле (4) имеем  $(a + b) \times CC_1^2 = J_C - J_{C_1}$ , то есть  $(a + b) CC_1^2 = (a \cdot CA^2 + b \cdot CB^2) - (a \cdot C_1A^2 + b \cdot C_1B^2)$ .

Из равенств  $AC_1 : C_1B = b : a$ ,  $AC_1 + C_1B = c$  находим:

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b}, \quad C_1B = \frac{ac}{a+b}.$$

Поэтому из (5) следует:

$$CC_1^2 = ab \left[ 1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right].$$

**Задача 5.** Зная стороны  $a, b, c$  треугольника  $ABC$ , вычислить расстояние между точкой  $Z$  пересечения медиан этого треугольника и точкой  $H$  пересечения его высот.

Поместим в вершины  $A, B, C$  (рис. 7) равные массы (по 1 грамму). По формулам (3) и (4) имеем

$$3HZ^2 = J_H - J_Z = HA^2 + HB^2 + HC^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Для вычисления расстояний  $HA, HB, HC$  построим треугольник  $A'B'C'$ , стороны которого параллельны сторонам данного треугольника  $ABC$  и проходят через его вершины. В треугольнике  $A'B'C'$  точка  $H$  — центр описанной окружности (проверьте!).

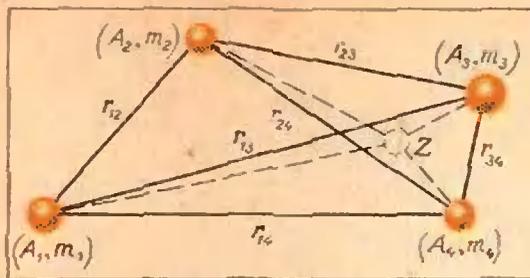


Рис. 8.

и поэтому  $HA' = HB' = HC' = R'$ , где  $R'$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle A'B'C'$ . Так как

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = 2,$$

то  $R' = 2R$ , где  $R$  — радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Отсюда  $HA^2 = C'H^2 - a^2 = 4R^2 - a^2$ ,  $HB^2 = 4R^2 - b^2$ ,  $HC^2 = 4R^2 - c^2$ . Поэтому

$$HZ^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

где  $R = \frac{abc}{4S}$ , а площадь  $S$  треугольника  $ABC$  вычисляется через его стороны по формуле Герона.

### Другая формула для момента инерции

Остановимся теперь еще на одной формуле для момента инерции, которая находит важные применения в механике (особенно в небесной механике при исследовании так называемой «задачи  $n$  тел»). Эта формула оказывается очень полезной и для решения чисто геометрических задач.

Пусть имеется  $n$  материальных точек  $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$  (рис. 8). Расстояние между точками  $A_i$  и  $A_k$  обозначим через  $r_{ik}$ . (Например,  $r_{24}$  — это расстояние  $A_2A_4$ .) Вы-  
ражение

$$\sum_{1 \leq i < k \leq n} m_i m_k r_{ik}^2$$

обозначает сумму всевозможных слагаемых вида  $m_i m_k r_{ik}^2$ , где  $i$  и  $k$  — любые целые числа между 1 и  $n$ ,

$i$  меньше, чем  $k$ . (Например,

$$\sum_{1 \leq i < k \leq 3} m_i m_k r_{ik}^2$$

обозначает  $m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2$ .)

Оказывается, что момент инерции  $J_Z$  системы материальных точек относительно ее центра тяжести  $Z$  можно выразить через взаимные расстояния между этими точками и их массы:

$$J_Z = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i < k \leq n} m_i m_k r_{ik}^2 \quad (6)$$

( $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  — суммарная масса всей системы).

Доказательство мы проведем только для случая  $n = 4$ , но из рассуждений будет ясно, что оно пригодно при любом  $n$ .

По теореме Лагранжа имеем:

$$m_1 \cdot J_{A_1} = m_1 J_Z + m_1 \cdot M \cdot ZA_1^2,$$

или, подробнее:

$$m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_1 m_4 r_{14}^2 = m_1 J_Z + m_1 \cdot M \cdot ZA_1^2.$$

Аналогично

$$m_2 m_1 r_{12}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 + m_2 m_4 r_{24}^2 = m_2 J_Z + m_2 \cdot M \cdot ZA_2^2,$$

$$m_3 m_1 r_{13}^2 + m_3 m_2 r_{23}^2 + m_3 m_4 r_{34}^2 = m_3 J_Z + m_3 \cdot M \cdot ZA_3^2,$$

$$m_4 m_1 r_{14}^2 + m_4 m_2 r_{24}^2 + m_4 m_3 r_{34}^2 = m_4 J_Z + m_4 \cdot M \cdot ZA_4^2.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем:

$$2 \sum_{1 \leq i < k \leq 4} m_i m_k r_{ik}^2 = M \cdot J_Z + M \cdot J_Z,$$

что равносильно требуемому равенству (6) (при  $n = 4$ ).

**Задача 6.** В окружность радиуса  $R$  вписан правильный 100-угольник  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{100}$ . Вычислить сумму  $\sigma$  квадратов длин всех его диагоналей и всех его сторон.

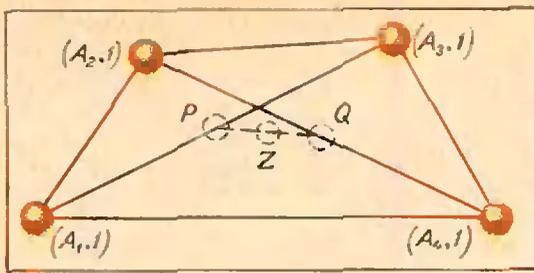


Рис. 9.

Поместим в каждую вершину многоугольника массы по 1 грамму. Центр тяжести возникшей системы материальных точек совпадает с центром  $O$  круга. По формуле (6) имеем

$$\sigma = \sum_{1 \leq i < k \leq 100} A_i A_k^2 = MJ_0 = (100R)^2.$$

**Задача 7.** Зная радиус  $R$  окружности, описанной около данного треугольника  $ABC$ , и радиус  $r$  окружности, вписанной в этот же треугольник, вычислить расстояние  $d$  между их центрами.

Пусть  $S$  — центр описанной окружности,  $Z$  — центр вписанной окружности,  $a, b, c$  (см) — длины сторон треугольника. Поместим в вершины  $A, B, C$  массы соответственно  $a, b$  и  $c$  граммов. Центром тяжести этой системы окажется точка  $Z$ . По формуле (4) имеем

$$J_S - J_Z = (a + b + c) d^2. \quad (7)$$

По формулам (2) и (6) находим:

$$J_S = a \cdot SA^2 + b \cdot SB^2 + c \cdot SC^2 = (a + b + c) R^2, \quad (8)$$

$$J_Z = \frac{abc^2 + bca^2 + cab^2}{a + b + c} = abc. \quad (9)$$

Кроме того, по известным формулам для площади треугольника имеем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} (a + b + c) r,$$

откуда

$$abc = 2Rr (a + b + c). \quad (10)$$

Из формул (7) — (10) следует, что

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Это и есть искомая формула («формула Эйлера»).

**Задача 8.** Известно, что в параллелограмме разность между сум-

мой квадратов длин всех его сторон и суммой квадратов длин его диагоналей равна нулю. Эйлер доказал, что в произвольном четырехугольнике эта разность равна учетверенному квадрату расстояния между серединами диагоналей (рис. 9). Доказать это утверждение.

Поместим в вершинах четырехугольника  $A_1A_2A_3A_4$  равные массы (по 1 грамму), и пусть  $Z$  — центр тяжести образовавшейся системы материальных точек. По определению (2) и по формуле (6) имеем

$$\begin{aligned} J_Z &= ZA_1^2 + ZA_2^2 + ZA_3^2 + ZA_4^2 = \\ &= \frac{1}{4} (A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + \\ &\quad + A_1A_4^2 + A_1A_3^2 + A_2A_4^2). \quad (11) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь систему из двух материальных точек  $(A_1, 1)$  и  $(A_3, 1)$  (их центр тяжести — середина  $P$  отрезка  $A_1A_3$ ). Применим формулу (4):

$$\begin{aligned} ZA_1^2 + ZA_3^2 &= PA_1^2 + PA_3^2 + 2ZP^2 = \\ &= \frac{1}{2} A_1A_3^2 + \frac{1}{2} PQ^2. \quad (12) \end{aligned}$$

Аналогично

$$ZA_2^2 + ZA_4^2 = \frac{1}{2} A_2A_4^2 + \frac{1}{2} PQ^2. \quad (13)$$

Из (11), (12) и (13) следует искомая формула Эйлера:

$$\begin{aligned} (A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_4A_1^2) - \\ - (A_1A_3^2 + A_2A_4^2) = 4PQ^2. \end{aligned}$$

**Упражнения**

1. Решите задачу 4 другим способом, воспользовавшись формулой (6).

2. Пусть  $Z$  — центр окружности вписанной в треугольник  $ABC$  ( $BC=a, CA=b, AB=c$ ). Докажите, что

$$a \cdot ZA^2 + b \cdot ZB^2 + c \cdot ZC^2 = abc.$$

3. Какую фигуру представляет собой множество всех точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний от вершин заданного в этой плоскости квадрата  $A_1A_2A_3A_4$  со стороной  $a$  есть постоянная величина  $c^2$ , если  $c^2 > 2a^2$ ?

4. В некотором треугольнике расстояние между точкой пересечения медиан и центром описанной окружности в три раза меньше радиуса этой окружности. Докажите, что треугольник прямоугольный.

# Задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 декабря 1973 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М231, М232» или «...Ф243». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).

Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

## Задачи

М231—М235; Ф243—Ф247

М231. Найдите все решения в натуральных числах уравнения

$$n^x + n^y = n^z.$$

Р. Егорян, ученик 9 класса

М232. а) Докажите, что к конечному множеству точек на плоскости, обладающему тем свойством, что любые три точки из этого множества являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника, всегда можно добавить еще одну точку так, что это свойство сохранится.

б) \* Справедливо ли аналогичное утверждение для бесконечного множества точек на плоскости?

П. С. Панков

М233 \*. В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма — число 2. Затем посередине между каждым

двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее — 1973 раза (рис. 1). Сколько раз будет написано число 1973?

Г. А. Гальперин

М234. Дан квадрат со стороной 1. От него отсекают четыре уголка — четыре треугольника, у каждого из которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют  $\frac{1}{3}$  их длины. С полученным 8-угольником делают то же самое: от каждой вершины отрезают треугольник, две стороны которого составляют по  $\frac{1}{3}$  соответствующую



Рис. 1.

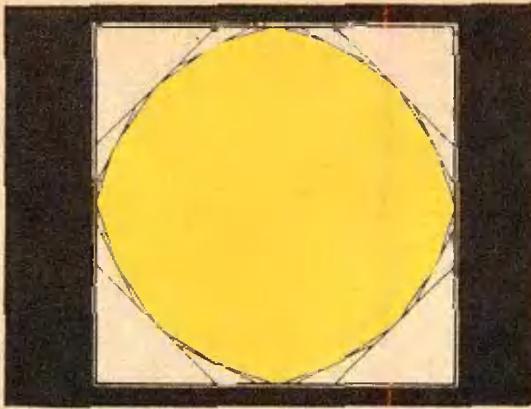


Рис. 2.

ших сторон 8-угольника, и так далее (рис. 2). Получается последовательность многоугольников (каждый содержится в предыдущем). Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников (то есть образованной точками, принадлежащими всем многоугольникам).

*С. Конягин, ученик 10 класса*

**M235 \*** По арене круглого цирка радиуса 10 м бегают лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов, на которые он поворачивал (рис. 3), не меньше 2998 радиан.

*И. Н. Бернштейн*

**Ф243.** Почему при ярком освещении те, кто пользуется не очень сильными очками, могут читать и без очков?

*И. А. Соловейчик*

Почему для того, чтобы сфотографировать одновременно два объекта, один из которых находится дальше другого, и получить на фотопленке резкое изображение обоих объектов, обычно уменьшают диаметр отверстия объектива (объектив диафрагмируют)?

**Ф244.** К двум точкам прикреплены цепочка длины  $l$  и концы двух стержней, сумма длин которых тоже равна  $l$ , а свободные концы шарнирно связаны. Чей центр тяжести находится ниже — цепочки или стержней?

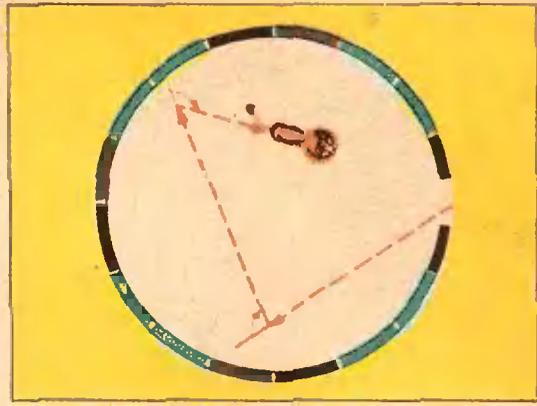


Рис. 3.

**Ф245.** Имеется равномерно заряженная полусфера. а) Показать, что плоскость, «закрывающая» эту полусферу, эквипотенциальна. б) Определить напряженность поля в точках этой плоскости.

Плотность заряда полусферы равна  $\sigma$ .

**Ф246.** Теплоизолированный сосуд объемом 2V разделен пополам тонкой перегородкой. В одной половине сосуда находится одноатомный газ с температурой  $T_1$  и давлением  $p_1$ , в другой половине — другой одноатомный газ с давлением  $p_2$  и температурой  $T_2$ . Найти установившуюся температуру смеси газов после того, как убрали перегородку.

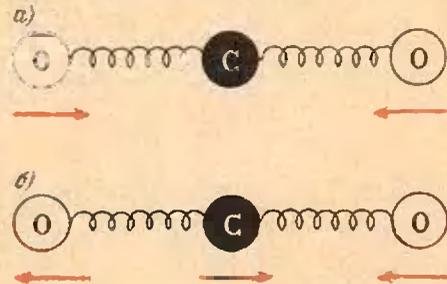


Рис. 4.

**Ф247.** Модель молекулы углекислого газа  $\text{CO}_2$  — три шарика, соединенные пружинками и расположенные в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая молекула может совершать линейные колебания двух типов: а) или б) (рис. 4). Найти отношение частот этих колебаний.

*Г. Л. Коткин*

## Решения задач

М191—М194; Ф203—Ф207

**М191.** На плоскости даны две точки  $A$  и  $B$  и прямая  $l$ , проходящая через точку  $A$  и не проходящая через точку  $B$ . Через точки  $A$  и  $B$  проводится произвольная окружность. Пусть  $O$  — ее центр,  $C$  — ее точка пересечения с прямой  $l$ , отличная от  $A$ . Найдите геометрическое место середины отрезков  $OC$ .

Мы найдем последовательно множества (все они оказываются прямыми линиями, рис. 1):

- $m_1$  центров  $O$ ;
- $m_2$  середин отрезков  $OA$  — точек  $K$ ;
- $m_3$  середин высот  $OL$  равнобедренных треугольников  $AOC$  — точек  $P$ ;
- $m_4$  середин отрезков  $OC$  — точек  $M$ .

Множество  $m_1$ , как хорошо известно, — прямая, проведенная перпендикулярно отрезку  $AB$  через его середину. Обозначим через  $D$  и  $E$  точки пересечения прямой  $m_1$  соответственно с прямой  $l$  и с перпендикуляром, восстановленным к прямой  $l$  в точке  $A$  (случай, когда прямые  $m_1$  и  $l$  параллельны, очень прост, но должен быть рассмотрен отдельно); через  $G$  — середину отрезка  $AE$ ; через  $F$  и  $H$  — такие точки прямой  $l$ , что  $AF = FD = DH$  (рис. 1).

Теперь нужно доказать три утверждения:

(1) Множество середин отрезков, у которых один конец ( $A$ ) фиксирован, а другой расположен на данной прямой ( $DE$ ), — прямая линия ( $FG$ ; рис. 2).

(2) Множество середин отрезков, параллельных заданному направлению ( $AE$ ) с концами на двух данных прямых ( $ED$  и  $AD$ ), — прямая линия ( $DG$ ; рис. 3).

(3) Множество вторых концов отрезков, параллельных заданному направлению ( $l$ ), первые концы и середины которых расположены на данных прямых ( $FG$  и  $DG$ ), — прямая линия ( $HG$ ; рис. 4).

Все эти утверждения доказываются несложно и почти одинаково. Докажем для примера (3). Во-первых, ясно, что любая точка  $M$  на прямой  $HG$  удовлетворяет нужному условию: если через точку  $M$  провести прямую, параллельную  $l$ , и обозначить через  $K$  и  $P$  ее точки пересечения с прямыми  $FG$  и  $DG$ , то  $P$  будет серединой отрезка  $KM$

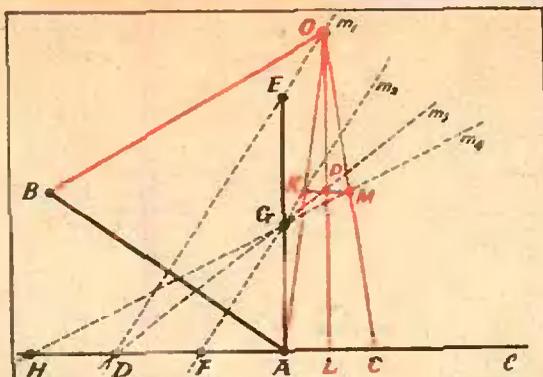


Рис. 1.

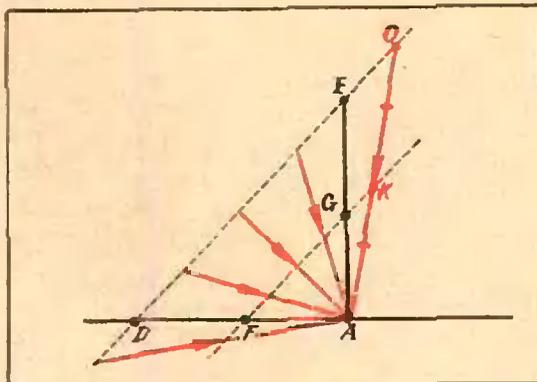


Рис. 2.

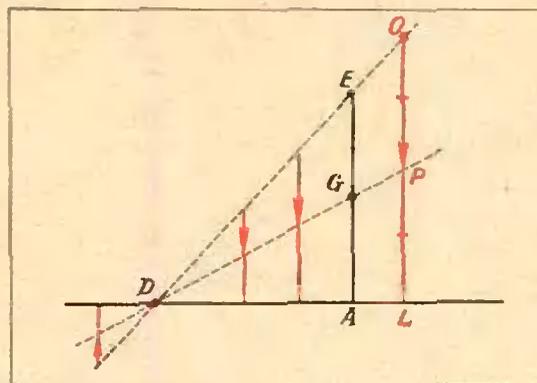


Рис. 3.

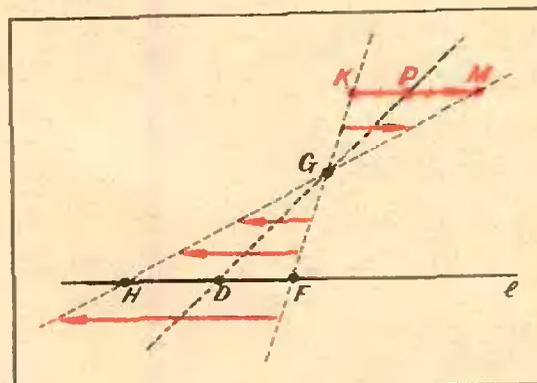


Рис. 4.

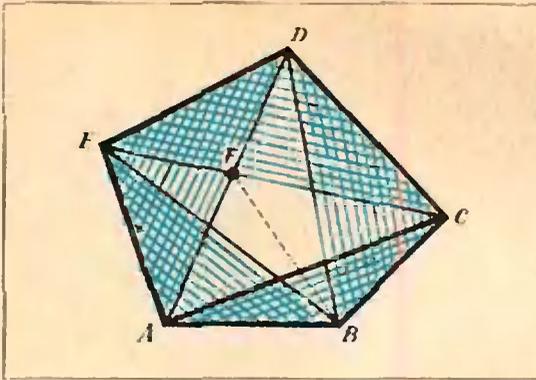


Рис. 5.

(это легко доказать с помощью подобия, используя равенство  $HD = DF$ ). Во вторых, на любой прямой, параллельной  $l$ , очевидно, лежит только одна точка искомого множества. Поэтому других точек (не лежащих на прямой  $HG$ ) в этом множестве быть не может. Остальные доказательства проведите сами.

Рассмотрите также случай, когда  $AB \perp l$ ; в этом случае все три прямые  $(m_2)$ ,  $(m_3)$ ,  $(m_4)$  сливаются в одну параллельную  $l$  и делящую отрезок  $AB$  в отношении 1 : 3.

**M192.** Даны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Найдите наибольшее  $m$ , обладающее таким свойством: какие бы  $m$  из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся 1000 —  $m$  чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

Докажем, что наибольшее  $m$  равно 499. Прежде всего, проверим, что никакие  $m$ , большее или равное 500, не обладает нужным свойством. Действительно, если  $m \geq 500$ , то, вычеркнув первые  $m$  чисел (от 1 до  $m$ ), мы оставим числа от  $m+1 \geq 501$  до 1000, среди которых ни одно, очевидно, не делится на другое (все попарные отношения меньше двух).

Теперь докажем, что  $m = 499$  обладает нужным свойством. Другими словами, докажем, что среди любых 501 чисел от 1 до 1000 найдутся два, из которых одно делится на другое (аналогичная задача решена в книге «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», ч. 1, «Арифметика и алгебра» № 91, «Наука», 1965).

Поставим в соответствие каждому числу (из 501) его наибольший нечетный делитель: числу  $2^k(2l+1)$  ставится в соответствие число  $(2l+1)$ . Всего нечетных чисел, меньших 1000, существует только 500. Следовательно, каким-то двум из 501 чисел будет соответствовать одно и то же нечетное число. Из таких двух чисел одно обязательно получится из другого умножением на некоторую степень двойки.

**M193.** Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образуемых парами сторон

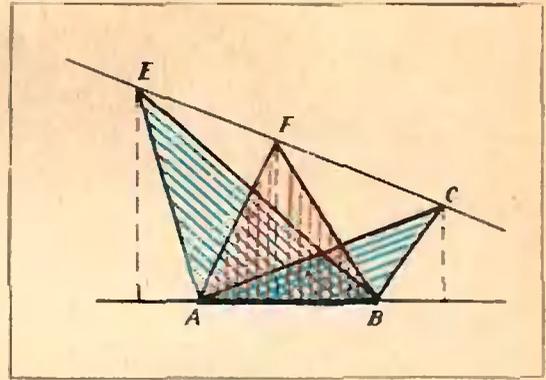


Рис. 6.

и диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

Приведем одно из наиболее коротких решений, присланное А. Макаричевым (Львов).

Докажем, что сумма площадей некоторых четырех из пяти треугольников, о которых говорится в условии, больше площади пятиугольника.

Пусть дан произвольный выпуклый пятиугольник. Обозначим его вершины буквами  $ABCDE$  так, чтобы площадь треугольника  $ABC$  была наименьшей из площадей треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDE$ ,  $DEA$  и  $EAB$  (см. рис. 5). Пусть  $F$  — точка пересечения  $AD$  и  $EC$ . Поскольку точка  $F$  лежит на отрезке  $EC$ , площадь  $S_{ABF}$  заключена между  $S_{ABE}$  и  $S_{ABC}$  (рис. 6). Но мы знаем, что  $S_{ABC} \leq S_{ABE}$ . Поэтому  $S_{ABF} \leq S_{ABE}$ .

Аналогично, поскольку точка  $F$  лежит на  $AD$  и  $S_{ABC} \leq S_{BCD}$ , то  $S_{BCF} \leq S_{BCD}$ .

Но треугольники  $AED$ ,  $EDC$ ,  $ABF$  и  $BCF$  покрывают пятиугольник (кусочек  $EFD$  — дважды). Поэтому сумма их площадей больше  $S_{ABCDE}$ . Тем более

$$S_{ABE} + S_{AED} + S_{EDC} + S_{BCD} \geq S_{ABCDE}.$$

Наше утверждение доказано.

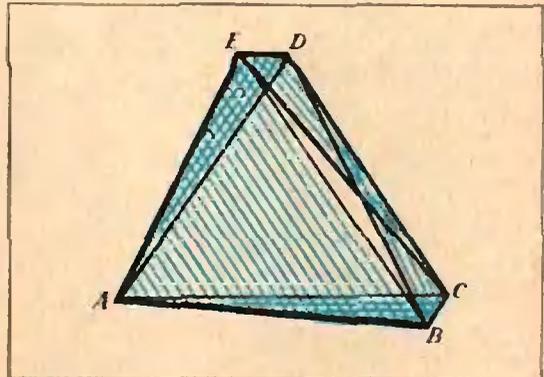


Рис. 7.

Пример, приведенный на рисунке 7, показывает, что отношение площади пяти треугольников к площади пятиугольника может быть очень близко к 1.

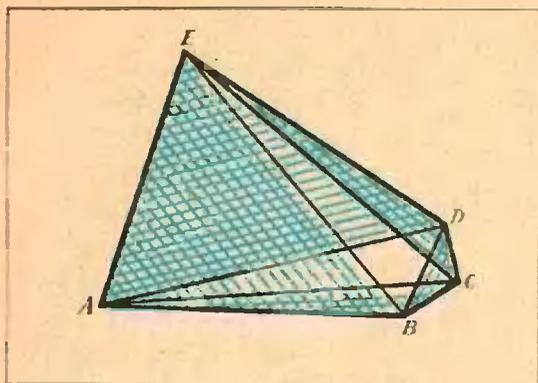


Рис. 8.



Рис. 9.

Нетрудно видеть, что это отношение не больше 2. Рисунок 8 показывает, что его можно сделать сколь угодно близким к 2.

**М194.** Даны два взаимно простых натуральных числа  $a$  и  $b$ . Известно, что всякое целое число можно представить в виде  $ax + by$ , где  $x$  и  $y$  — целые. Рассмотрим множество  $M$  целых чисел, которые представим в виде  $ax + by$ , где  $x$  и  $y$  — целые неотрицательные числа.

а) Каково наибольшее число  $c$ , не принадлежащее множеству  $M$ ?

б) Докажите, что из двух чисел  $n$  и  $c - n$  (где  $n$  — любое целое) одно принадлежит  $M$ , а другое нет.

(На рисунке 9 для  $a = 5$  и  $b = 3$  целые точки, принадлежащие множеству  $M$ , — красные, не принадлежащие — голубые).

Нарисуем на плоскости систему координат  $Oxy$  и сформулируем нашу задачу на геометрическом языке. Каждую пару целых чисел  $(x, y)$  мы будем называть «целой точкой» и изображать красной точкой, если обе ее координаты неотрицательны ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), и синей точкой — если хотя бы одна координата отрицательна (рис. 10). Взаимно простые натуральные числа  $a$  и  $b$  мы считаем фиксированными (на рисунке мы возьмем  $a = 5, b = 3$ ). Для каждого  $n$  уравнение

$$ax + by = n$$

определяет, как известно, прямую. Обозначим ее через  $l_n$ . Разумеется, все прямые  $l_n$

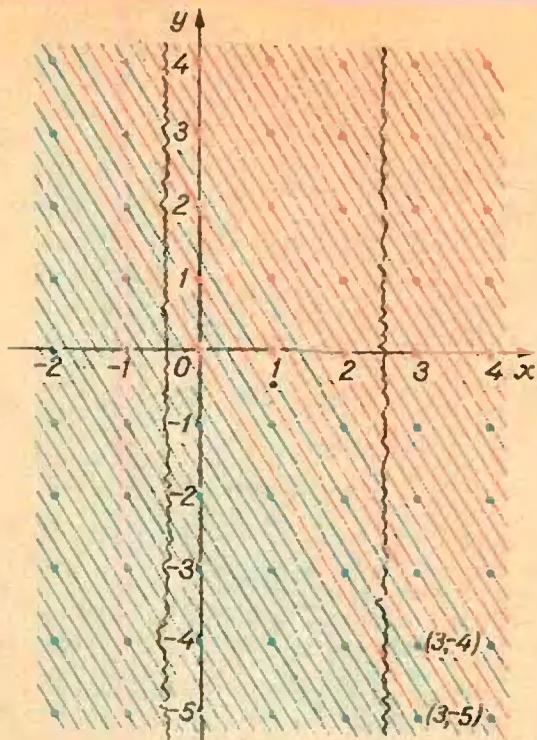


Рис. 10.

параллельны друг другу. Пусть  $n$  — целое. Будем считать прямую  $l_n$  красной, если она проходит хотя бы через одну красную точку, и синей — в противном случае\*). Мы должны выяснить, каково наибольшее  $c$ , которому соответствует синяя прямая  $l_c$ , и доказать, что тогда из двух прямых  $l_n$  и  $l_{c-n}$  одна — синяя и одна — красная ( $n$  — любое целое число).

Мы будем пользоваться в нашем решении перемещениями плоскости, которые отображают множество целых точек на себя и одновременно каждую прямую  $l_n$  переводят в ту же самую или некоторую другую прямую  $l_n'$  из нашего семейства. Это, во-первых, параллельные переносы на любой вектор  $(p, q)$  с целыми  $p$  и  $q$ :

$$(x, y) \mapsto (x + p, y + q),$$

и, во-вторых, повороты на  $180^\circ$  (или, что то же самое, симметрии относительно точки)

с любыми центрами  $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ , где  $p$  и  $q$  — целые:

$$(x, y) \mapsto (p - x, q - y).$$

Докажем, что на каждой прямой  $l_n$  целые точки встречаются через равные промежутки.

\* Как следует из сказанного в условии, каждая прямая  $l_n$  проходит хотя бы через одну целую точку. Ниже мы докажем этот факт.

**Лемма 1.** Если  $(x_0, y_0)$  — целая точка на прямой  $l_n$ , то ближайшими к ней целыми точками на  $l_n$  будут  $(x_0 - b, y_0 + a)$  и  $(x_0 + b, y_0 - a)$  ( $a$  и  $b$  взаимно просты!).

Рассмотрим прямую  $l_0$ , проходящую через  $(0, 0)$ . Пусть  $(-b_1, a_1)$  — ближайшая к  $(0, 0)$  целая точка  $l_0$  такая, что  $b_1 > 0, a_1 > 0$  (мы еще не знаем, что  $b_1 = b, a_1 = a$ ).  $(x_0, y_0)$  — целая точка  $l_n$ . При переносе на вектор  $(x_0, y_0)$  отрезок прямой  $l_0$  от  $(0, 0)$  до  $(-b_1, a_1)$  перейдет в отрезок  $l_n$  от  $(x_0, y_0)$  до  $(x_0 - b_1, y_0 + a_1)$ . Тем самым, точка  $(x_0 - b_1, y_0 + a_1)$  будет ближайшей к  $(x_0, y_0)$  точкой  $l_n$  сверху. Точно так же при переносе на вектор  $(x_0 + b_1, y_0 - a_1)$  — тот же отрезок прямой  $l_0$  перейдет в отрезок прямой  $l_n$  от  $(x_0 + b_1, y_0 - a_1)$  до  $(x_0, y_0)$ . Следовательно, и на этом отрезке целыми точками будут только его концы.

Отсюда уже следует, что на любой прямой  $l_n$  (если на ней есть хоть одна целая точка) промежутки между соседними целыми точками один и тот же:  $a_1$  единиц по оси  $Oy$  и  $b_1$  — по оси  $Ox$ . Это, в частности, относится и к прямой  $l_0$ . Поскольку  $(-b, a)$  принадлежит  $l_0$ , то отсюда следует, что  $b = db_1, a = da_1$ , где  $d$  — некоторое целое число. Но числа  $a$  и  $b$  по условию взаимно просты. Значит,  $d = 1$ , то есть  $a = a_1, b = b_1$ . Лемма 1 доказана.

Из этой леммы следует, что каждая прямая  $l_n$ , где  $n$  — целое, переходит ровно через одну точку внутри полосы  $0 \leq x \leq b - 1$ . При этом, очевидно (см. рис. 10), если прямая красная, то есть где-то переходит через красную точку, то ее целая точка в выделенной полосе тоже будет красной (а точка синей прямой, разумеется, синяя).

Теперь заметим, что при симметрии относительно точки  $\left(\frac{b-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (b-1-x, -1-y),$$

полоса  $0 \leq x \leq b-1$  переходит в себя, причем красные точки переходят в синие, и наоборот. Прямая  $l_n$  после этой симметрии переходит в прямую  $l_{ab-a-b-n}$ : если  $ax + by = n$ , то  $ax' + by' = a(b-1-x) + b(-1-y) = ab - a - b - n$ . (Через центр симметрии, где

$$a\left(\frac{b-1}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{ab-a-b}{2},$$

ни одна из наших прямых может и не проходить; на рис. 10 центр — точка  $(1, -\frac{1}{2})$ .)

Ясно, что самая нижняя красная прямая — это  $l_0$ . Следовательно, самая верхняя синяя прямая — это  $l_{ab-a-b}$ . Итак, наибольшее число, не принадлежащее множеству, — это

$$c = ab - a - b,$$

и из двух чисел  $n$  и  $c - n$  одно принадлежит  $M$ , а другое — нет.

Мы пользовались тем, что каждое целое  $n$  можно представить в виде  $ax + by$ , где  $x$  и  $y$  — целое. Это тоже нетрудно доказать с помощью «решетки».

**Лемма 2.** На каждой прямой  $l_n$ , где  $n$  — целое, есть хотя бы одна целая точка.

Достаточно доказать, что целая точка  $(x_0, y_0)$  есть на прямой  $l_1$ : если  $ax_0 + by_0 = 1$ , то  $a(nx_0) + b(ny_0) = n$ , так что  $(nx_0, ny_0)$  будет принадлежать  $l_n$ .

Рассмотрим параллелограмм с вершинами  $(0, 0); (0, 1); (b, 1-a); (b, -a)$ , две меньшие стороны которого равны 1, а большие лежат на прямых  $l_0$  и  $l_b$ . Внутри этого параллелограмма (не в вершинах) лежит  $b-1$  целая точка: на каждой прямой  $x = 1, x = 2, x = b-1$  — по одной. С другой стороны, всего этот параллелограмм пересекают как раз столько же  $-(b-1)$  — прямых  $l_n: l_1, l_2, \dots, l_{b-1}$  (не считая  $l_0$  и  $l_b$ ). Поскольку более одной целой точки, координаты  $x$  которых отличаются меньше чем на  $b$ , прямая  $l_n$  иметь не может, то, стало быть, все точки в количестве  $(b-1)$  лежат по одной штуке на каждой прямой. В частности, есть целая точка и на  $l_1$ . Лемма 2 доказана.

Н. Б. Васильев

**Ф203.** В электронном генераторе использован триод, в котором расстояние между катодом и анодом равно 1 мм. Оценить максимальную частоту колебаний, которые можно получить, используя этот генератор, если анодное напряжение составляет 200 в.

Периодическое колебание тока в анодной цепи лампы генератора достигается периодическим изменением потенциала сетки лампы. Время  $t$ , за которое происходит одно колебание потенциала сетки, должно быть не меньше времени  $\tau$  пролета электрона от катода к аноду. Максимальную возможную частоту колебаний, получаемых с помощью данного генератора, можно определить из условия

$$\tau = t \Rightarrow v_{\max} = \frac{1}{\tau}.$$

(Если  $\tau > t$ , то электроны не успевают достигнуть катода до «запирания» лампы.)

Напряженность поля между электродами

$$E = \frac{U}{d} \quad (\text{мы не учитываем меняющееся}$$

поле сетки), ускорение электрона равно

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$d = a \frac{\tau^2}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d^2 m}{Ue}}.$$

$$\text{Поэтому } v_{\max} = \sqrt{\frac{Ue}{2d^2 m}} \approx 3000 \text{ МГц.}$$

И. Ш. Слободецкий

**Ф204** Космический корабль подлетает к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. В момент максимального сближения с Луной на короткое время включается тормозный двигатель, и корабль переходит на круговую орбиту спутника Луны. Определите изменение скорости корабля при торможении. Радиус Луны  $R_{\text{Л}} = 1740$  км, ускорение свободного падения на поверхности Луны  $g_{\text{Л}} = 1,7$  м/с<sup>2</sup>.

*Примечание.* На параболической траектории полная энергия корабля равна нулю.

При движении космического корабля по параболической траектории в любой точке траектории выполняется условие

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = 0,$$

то есть

$$\gamma \frac{mM_{\text{Л}}}{R} = -\frac{mv^2}{2},$$

где  $M_{\text{Л}}$  — масса Луны,  $m$  — масса корабля,  $R$  — расстояние от корабля до Луны,  $v$  — скорость корабля в данной точке,  $\gamma$  — гравитационная постоянная. В момент максимального приближения к Луне  $R = R_{\text{Л}}$  (так как траектория почти касается поверхности Луны, мы пренебрегаем высотой орбиты по сравнению с радиусом Луны  $R_{\text{Л}}$ ). Скорость корабля в этот момент максимальна; найдем ее из условия

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \gamma \frac{M_{\text{Л}}m}{R_{\text{Л}}};$$

отсюда

$$v_{\text{max}} = \sqrt{2\gamma \frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}}} = \sqrt{2g_{\text{Л}}R_{\text{Л}}}$$

( $v_{\text{max}}$  — вторая космическая скорость для Луны). При движении по круговой орбите центростремительное ускорение кораблю сообщает сила тяготения. Следовательно, при торможении скорость корабля надо понизить до величины  $v_1$ , определяемой из условия

$$\frac{mv_1^2}{R_{\text{Л}}} = \gamma \frac{M_{\text{Л}}m}{R_{\text{Л}}^2}$$

(согласно второму закону Ньютона). Отсюда

$$v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}}} = \sqrt{g_{\text{Л}}R_{\text{Л}}}.$$

Изменение скорости при торможении

$$\Delta v = v_{\text{max}} - v_1 = g_{\text{Л}}R_{\text{Л}}(\sqrt{2} - 1) \approx \approx 700 \text{ м/с}.$$

С. М. Козел

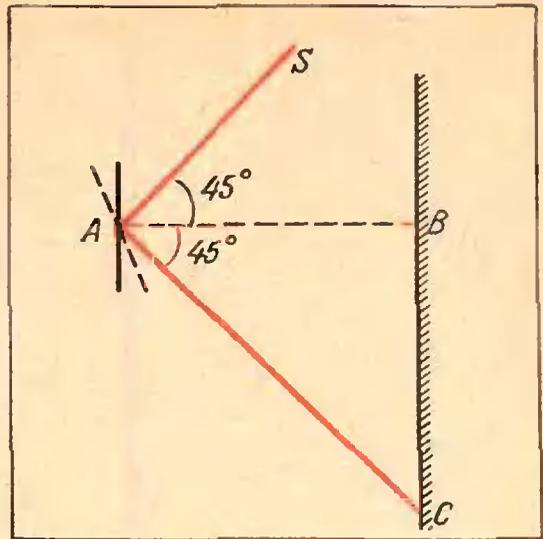


Рис. 11.

**Ф205.** Осколком стекла  $A$  неправильной формы на вертикальную стенку пускают солнечный зайчик один раз в точку  $B$ , другой раз в точку  $C$  (рис. 11). Зайчик в точке  $B$  оказывается круглым, а освещенность его в центре втрое больше, чем на участках, освещенных только рассеянным светом. Какова освещенность в центре зайчика в точке  $C$ ?

Лучи  $SA$ ,  $AB$  и  $AC$  лежат в одной вертикальной плоскости, луч  $AB$  горизонтален,  $\angle SAB = \angle BAC = 45^\circ$ .

Вы, наверное, не раз замечали, что если стенка, на которую вы пускаете солнечный зайчик, находится далеко от вас, то зайчик оказывается круглым, а если стенка находится близко, то солнечный зайчик имеет ту же форму, что и зеркало. Почему это происходит?

Лучи света, идущие от любой точки Солнца, отражаются от зеркала и, попадая затем на экран, дают пятно, имеющее форму зеркала (рис. 12). Так как Солнце находится

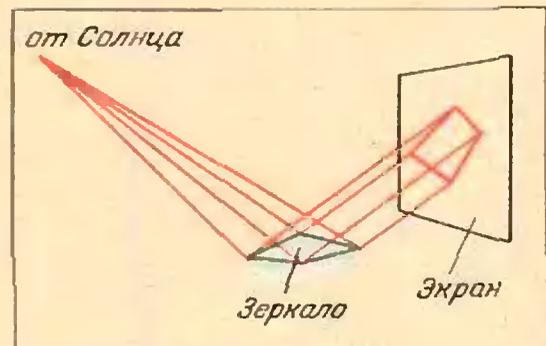


Рис. 12.

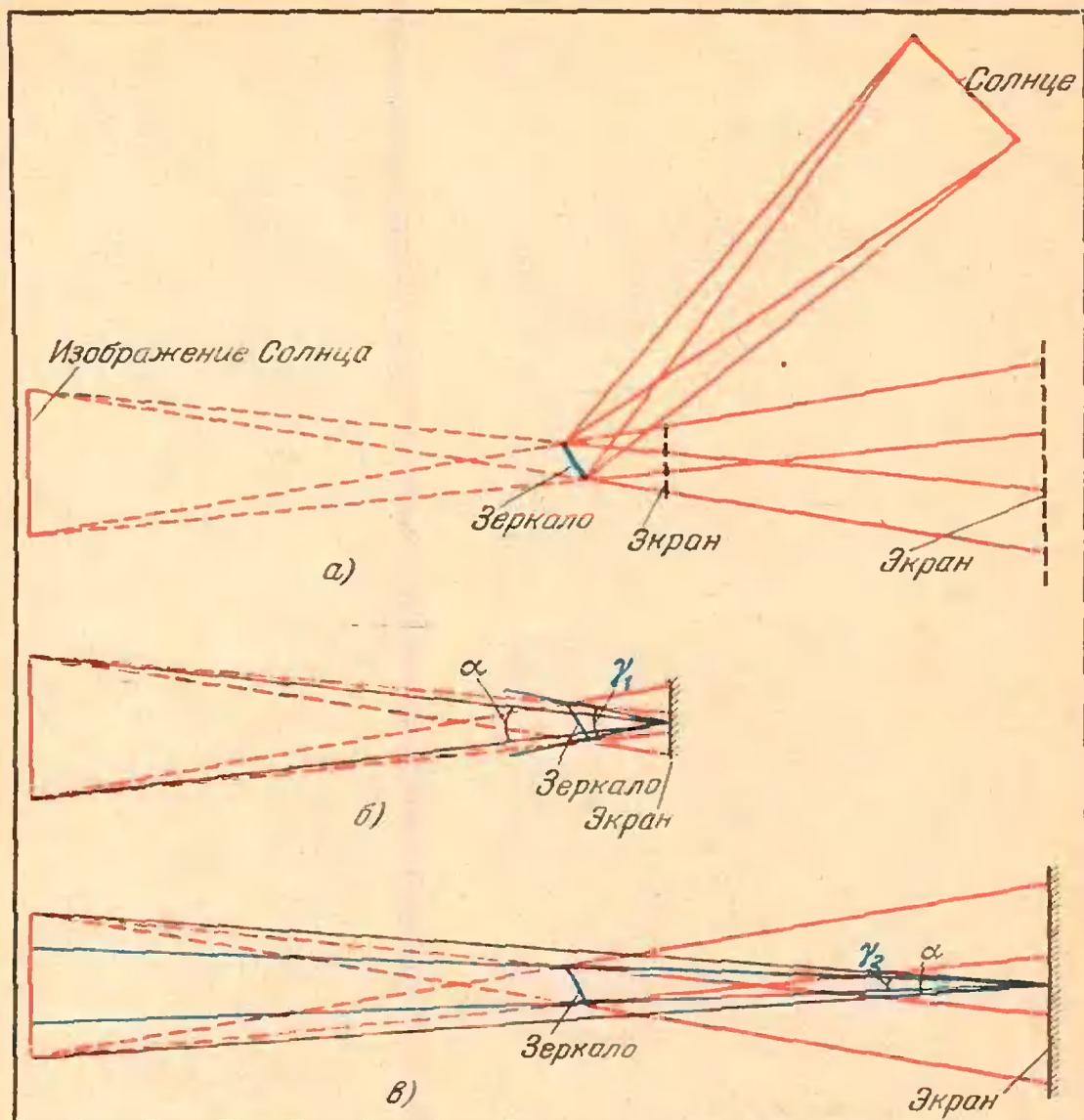


Рис. 13.

очень далеко и лучи, идущие от точки Солнца и отраженные затем от зеркала, можно считать параллельными друг другу, то размер пятна совпадает с размером зеркала. Такое пятно дает каждая точка Солнца. На экране пятна накладываются друг на друга. Если экран находится близко к зеркалу, так что размер каждого из пятен больше расстояния между пятнами, которые получаются при отражении от зеркала лучей, идущих от диаметрально противоположных точек Солнца, то зайчик на экране будет иметь форму зеркала, хотя и несколько размытую (размеры зайчика будут мало отличаться от размеров зеркала). Если же экран находится далеко от зеркала, так что размеры каждого пятна малы по сравнению с большим «суммарным» пятном, то это большое пятно будет круглым или эллиптическим, в зависимости

от угла между плоскостями зеркала и экрана.

Выше мы говорили о большом или малом расстоянии между зеркалом и экраном. Но какие расстояния можно считать большими, а какие малыми? Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим лучи, идущие из диаметрально противоположных точек Солнца (или, что то же, от точек мнимого изображения Солнца в зеркале) (см. рис. 13, а). Ясно, что пятно на экране имеет форму зеркала, если угловой размер зеркала, то есть угол  $\gamma_1$ , под которым видно зеркало из точки экрана, больше углового размера Солнца  $\alpha$  (рис. 13, б). Если же угловой размер Солнца больше углового размера зеркала  $\gamma_2$  (рис. 13, в), то зайчик на экране имеет форму круга (или эллипса).

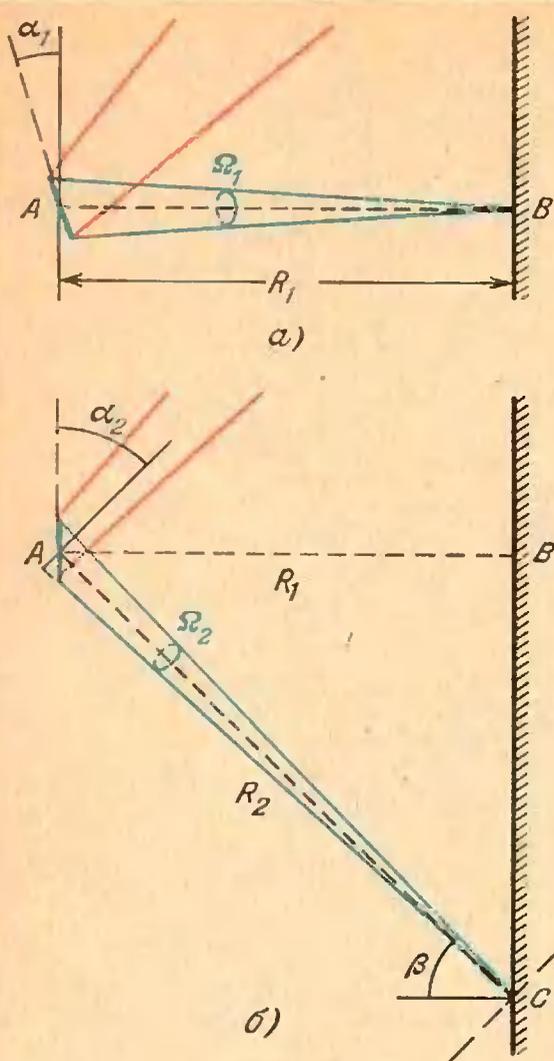


Рис. 14.

В нашем случае зайчик от осколка стекла оказался в точке  $B$  круглым. Круглым он будет и в точке  $C$ , которая находится от стекла еще дальше, чем точка  $B$ . Это означает, что угловой размер Солнца в нашем случае больше углового размера стекла. Но в этом случае, как видно из рисунка 13, в, в каждую точку экрана попадают лучи, идущие не из всех точек Солнца или его мнимого изображения, а только из тех, которые видны из точки экрана в том же телесном угле  $\Omega$ , что и стекло. Следовательно, освещенность пятна на экране за счет тех лучей, которые отражаются от стекла, пропорциональна телесному углу  $\Omega$ , в котором видно стекло из точки экрана. Для точки  $B$  этот угол равен

$$\Omega_1 = \frac{S \cos \alpha_1}{R_1^2}, \text{ где } S \text{ — площадь поверхности}$$

стекла (рис. 14, а). Поэтому добавка к освещенности рассеянным светом в точке

$B$  экрана равна  $k \frac{S \cos \alpha_1}{R_1^2}$ , где  $k$  — коэф-

фициент пропорциональности.

Пусть  $E_0$  — освещенность тех участков экрана, на которые попадает только рассеянный свет. Тогда в точке  $B$  добавка к освещенности рассеянным светом составляет

$$\Delta E_B = 3E_0 - E_0 = 2E_0 = \frac{kS \cos \alpha_1}{R_1^2}. \quad (1)$$

В точке  $C$  телесный угол, в котором видно зеркало (рис. 14, б), равен

$$\Omega_2 = \frac{S \cos \alpha_2}{R_2^2}.$$

Это означает, что если бы экран в точке  $C$  был перпендикулярен солнечным лучам, то его освещенность в точке  $C$  была бы равна

$$E_C = E_0 + k\Omega_2 = E_0 + k \frac{S \cos \alpha_2}{R_2^2}.$$

Так как отраженные солнечные лучи в точке  $C$  составляют угол  $\beta$  с нормалью к поверхности экрана, то

$$E_C = E_0 + k \frac{S \cos \alpha_2}{R_2^2} \cos \beta. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), найдем, что

$$E_C = E_0 \left[ 1 + 2 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \cos \beta \right].$$

Так как  $R_2 = R_1 / \cos \beta$ ,  $\alpha_1 = 22,5^\circ$ ,  $\alpha_2 = 45^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ , то

$$E_C = E_0 \left[ 1 + 2 \frac{\cos^4 45^\circ}{\cos 22,5^\circ} \right] = 1,52 E_0.$$

**Ф206.** Оцените, до какой максимальной температуры может нагреться из-за трения о воздух поверхность самолета, который летит со скоростью, близкой к скорости звука. Для оценки считать, что воздух состоит из двухатомных молекул азота, энергия которых равна  $5/2 kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — абсолютная температура. Температуру окружающего воздуха считать равной —  $10^\circ \text{C}$ .

При столкновении молекулы азота с поверхностью самолета она не может получить энергию большую, чем  $\frac{5}{2} kT_1 + \frac{mv^2}{2}$ ,

где  $v$  — скорость самолета (или, в системе координат, связанной с самолетом, средняя скорость упорядоченного движения налетающих на нос самолета молекул азота),  $m$  — масса молекулы азота,  $T_1$  — температура окружающего воздуха.

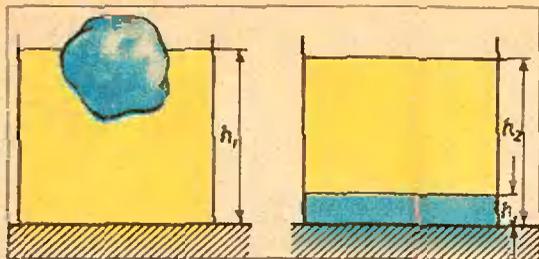


Рис. 15.

Так как молекулы азота после столкновения с самолетом должны иметь энергию  $\frac{5}{2}kT_2$ , соответствующую температуре  $T_2$  поверхности самолета, то

$$\frac{5}{2}kT_2 < \frac{5}{2}kT_1 + \frac{mv^2}{2}$$

Отсюда

$$T_{2\max} = T_1 + \frac{1}{5} \frac{mv^2}{k} \approx 373 \text{ К.}$$

**Ф207.** На поверхности масла, налитого в цилиндрический сосуд, плавает кусочек водяного льда. Температура всей системы равна  $0^\circ \text{C}$ . Как изменится уровень масла и давление на дно сосуда, когда лед растает, а образовавшаяся вода опустится на дно сосуда?

Давление на дно сосуда не изменится. Действительно, сила давления на дно  $F$  равна весу содержимого сосуда, а вес не меняется. Следовательно, не меняется и само давление, равное  $\frac{F}{S}$ , где  $S$  — площадь дна сосуда.

А как меняется уровень масла? Пусть высота уровня воды в сосуде равна  $h_3$ , высота уровня масла равна  $h_2$ , а высота уровня масла до таяния льда  $h_1$  (рис. 15). Так как лед плавает и не касается дна сосуда, то давление на дно в первом случае равно

$$p_1 = \rho_M g h_1.$$

Во втором случае оно равно

$$p_2 = \rho_M g (h_2 - h_1) + \rho_B g h_3$$

( $\rho_M$  — плотность масла,  $\rho_B$  — плотность воды).

Из равенства давлений следует, что

$$\rho_M h_1 = \rho_M (h_2 - h_1) + \rho_B h_3$$

и

$$h_2 = h_1 - \left( \frac{\rho_B}{\rho_M} - 1 \right) h_3.$$

Так как  $\frac{\rho_B}{\rho_M} > 1$ , то  $h_2 < h_1$ .

Следовательно, уровень масла при таянии льда понизится.

*И. Ш. Слободецкий*

Мы получили более 250 решений задачи М182 и более 200 решений задачи М186. Правильные решения задач М150, М181, М183—М185, М187—М189 прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): А. Абдурахманов (Баку) 4; С. Абрамов (Москва) 1; П. Агаонов (Баку) 1; С. Агеев (Воронеж) 3, 7, 9; Н. Ажицев (п. Литовка Львовской обл.) 4; С. Актеричев (Магнитогорск) 3, 7; Ю. Акутин (Москва) 1, 3, 7; В. Алевин (Москва) 3, 4; Г. Амвросов (Каспи ГССР) 3; Б. Ашавский (Москва) 1, 3; Р. Аюпова (д. Бизяки ТАССР) 3; С. Бадиков (Хмельницкий) 3; П. Баньковский (Уральск) 3, 4; А. Бараов (с. Старый Урух КБАССР) 8; М. Баум (Москва) 1, 3—5; Е. Башкиров (Минск) 3, 7; С. Белолипецкий (Киржач Владимирской обл.) 1; Н. Березовский (Черновцы) 3, 4; А. Берлин (Бобруйск) 1, 3, 8; Л. Блаженнова (Москва) 3; А. Блох (Харьков) 06), 1, 3—5, 7—9; А. Борзак (Москва) 1; С. Бородецкий (Пушкин) 7; М. Бренерман (Казань) 1; Е. Быстров (Унеча Брянской обл.) 3; А. Вайнштейн (Баку) 3, 7; А. Валиков (Ташкент) 1, 3, 4, 8, 9; К. Вартамян (Кафиз) 3; С. Васильенков (Донецк) 1; А. Векслер (Ташкент) 8; С. Вилкомир (Москва) 3, 5; Ю. Вороновский (Днепропетровск) 3, 4, 7; А. Волканин (Ереван) 3; Г. Высоцкая (Красноярск) 1, 3; О. Гапоненко (Кировоград) 3; С. Гизунов (Ленинград) 3; А. Гизунтерман (Черновцы) 1; А. Глазков (Киев) 1, 8, 9; О. Глущенко (Киев) 3; Б. Гомбосурянгийн (МНР) 4; А. Гордиенко (Москва) 1, 5; И. Готман (Арзамас) 3; Л. Готман (Арзамас) 3; М. Грабелковский (Воронеж) 8; А. Григорян (Баку) 1, 3, 4, 7—9; А. Гуденко (Нарофоминск Московской обл.) 3; А. Гуревич (Минск) 3; Е. Гусев (Павлоград Днепропетровской обл.) 1; Я. Гусейнов (Сызань АзССР) 4; К. Данильченко (Волгоград) 4; В. Дворецкий (Отрадный Куйбышевской обл.) 7; М. Денисов (Ростов-на-Дону) 3; М. Дербинян (Тбилиси) 3; Ю. Довгодько (Киев) 1, 3; В. Драчев (Новосибирск) 3; М. Драчинский (Тбилиси) 3; И. Дылевский (Москва) 3, 5, 7; А. Еременко (Харьков) 7, 9; Г. Еркнапетян (Ереван) 3; А. Журавлев (Москва) 3, 8; В. Запорожская (п. Сосница Черниговской обл.) 3, 7; Г. Заргарян (Тбилиси) 3; А. Заславский (Калинин) 1, 3, 4; В. Згонник (ст. Подгородная Николаевской обл.) 3; С. Зинкович (Ташкент) 3, 8; М. Златоустовский (с. Правая Хава Воронежской обл.) 3; Е. Зубкова (Москва) 1; Ж. Идарисов (с. Саты Алма-Атинской обл.) 4; С. Иоанниди (Тбилиси) 3; Л. Иозефовичус (Калининград) 3; С. Казантарян (Степанакерт АзССР) 3; В. Карасев (Ярославль) 3; В. Карачик (Ташкент) 3; Д. Карпов (Павлоград) 3; А. Кац (Баку) 1; В. Квасницын (Коркино Челябинской обл.) 1; П. Кирей (Николаев) 3; Ю. Кириленко (Черкассы) 1, 7; С. Кириллов (Куйбышев) 1, 3; И. Кирова (Болгария) 1, 3, 4; А. Клейн (Одесса) 7; Ю. Князихин (Таллин) 7; М. Кобозев (Киев)

1, 3, 4, 8; *О. Кожушняк* (Москва) 3; *К. Козел* (Польша) 1, 4; *Б. Коломенский* (Киев) 3; *В. Комлев* (Красноярск) 3; *С. Конягин* (Саратов) 0, 1, 3—5, 7, 8; *С. Корнеев* (Новокузнецк) 3; *С. Кузнецов* (Чебоксары) 1, 3; *А. Кукуш* (Киев) 3, 7, 9; *Е. Куланин* (Рязань) 3; *В. Кульбака* (с. Держановка Черниговской обл.) 3; *В. Куранов* (Тетюши ТАССР) 3; *А. Курбатов* (Москва) 3; *А. Кураляндчик* (Ленинград) 1, 3—5, 8, 9; *Л. Лалаян* (Баку) 3; *А. Легостев* (Москва) 3; *Г. Либеров* (Москва) 1; *А. Литовченко* (Белокаповичи Житомирской обл.) 1, 3, 4; *М. Лифшиц* (Ленинград) 0 6; *Ю. Лсбач* (Евпатория) 1, 7, 8; *Т. Локотш* (Одесса) 3; *И. Лучинкин* (Днепропетровск) 1, 3, 4; *А. Львов* (Саратов) 3; *М. Любич* (Харьков) 8; *Е. Мазур* (Дербент) 1; *А. Макаричев* (Львов) 1, 4, 5; *Г. Малашин* (Львов) 1, 3, 4, 7, 8; *В. Маркин* (Толочин Витебской обл.) 1, 4; *Г. Матвеев* (Ленинград) 3, 4, 7; *В. Мащукатов* (п. Цалка ГССР) 3; *И. Меджибовский* (Москва) 3; *С. Мельник* (Харьков) 1, 3; *С. Мерзляков* (Уфа) 3, 4; *Ю. Меренков* (Бердигестях ЯАССР) 3, 4; *К. Мтиянахметов* (Бугульма ТАССР) 1, 3; *А. Молотков* (Кубинка Московской обл.) 7; *В. Мондрус* (Тбилиси) 3; *Ж. Мукажанов* (ст. Жарма Семипалатинской обл.) 7; *Г. Мушинов* (Хаджиабатский р-н УзССР) 4; *Г. Мустафаев* (Сиазань АзССР) 1, 3, 4; *К. Мхитарян* (Ереван) 1; *А. Мягков* (Калининград) 3; *В. Нападов* (Харьков) 7; *С. Насыров* (Казань) 3; *В. Наумов* (п. Коммунар Ленинградской обл.) 4; *Л. Нахмансон* (Орск) 3; *А. Николаев* (Москва) 1, 3, 5, 7; *Т. Никонова* (Москва) 3; *Р. Норвайша* (Каунас) 3; *С. Нужный* (Куйбышев) 1, 3, 7; *С. Овчинников* (Ленинград) 3, 4; *С. Оганесян* (Армавир) 3; *В. Олейник* (Днепропетровск) 1, 4; *В. Орлов* (Астрахань) 3; *Д. Панженский* (Усть-Каменогорск) 4; *В. Паныков* (Минск) 1, 3; *О. Паракина* (Москва) 3; *П. Парамонов* (Москва) 1, 3; *Э. Парилис* (Ташкент) 1, 3, 8; *А. Парлов* (ст. Узловая Тульской обл.) 1; *А. Пастухов* (Свердловск) 1; *Н. Петров* (Болгария) 4; *А. Печковский* (Москва) 1, 3, 4; *А. Пидман* (Одесса) 1, 3, 4; *В. Писарский* (Москва) 1; *С. Пищикова* (Москва) 3; *Л. Пищикова* (п/о Плисса Минской обл.) 3; *С. Пожидаев* (Куйбышев) 1, 3, 7; *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) 1; *В. Поркищян* (Ростов-на-Дону) 1; *А. Пригорницкий* (Славянск Донецкой обл.) 3; *В. Прунис* (Москва) 8; *С. Путьинцев* (Кемерово) 1, 3; *Г. Пятецкий* (Москва) 3; *А. Разгуляев* (Клин Московской обл.) 8; *А. Райнин* (Москва) 1, 3—5; *А. Рашковский* (Харьков) 1, 3—5; *А. Резников* (Киев) 3; *Г. Резников* (Саратов) 3, 4; *С. Родионов* (Саратов) 1, 3—5; *Р. Рожков* (Рязань) 1, 3, 4; *Е. Рудерман* (Черновцы) 3; *Н. Рундквист* (Свердловск) 1; *М. Садыков* (Казань) 3; *М. Сапир* (Свердловск) 1, 3, 4; *С. Сатановский* (Харьков) 1, 3—5, 7; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) 4; *А. Сегаля* (Ленинград) 8; *Т. Сельбирак* (Польша) 1, 3; *В. Семенов* (Миасс Челябинской обл.) 1; *С. Семенов* (Воронеж) 3; *И. Сивицкий* (Ленин-

град) 7; *И. Сидоров* (Москва) 3, 4; *И. Симакин* (Ворожеж) 3; *П. Симоневич* (Москва) 1, 3, 4, 7; *М. Синяков* (Саратов) 1; *Р. Сирота* (Харьков) 3—5; *Г. Скляр* (Харьков) 1, 3—5; *В. Слепой* (Фрунзе) 3, 7; *А. Слассаренко* (Рубцовск Алтайского края) 1, 3, 7—9; *А. Слинкин* (Москва) 1, 3, 4, 7, 8; *А. Соколов* (Новосибирск) 3; *В. Солодушкин* (Степногорск) 1; *Б. Соломяк* (Ленинград) 1, 3; *Т. Сопа* (с. Каменское Запорожской обл.) 3; *П. Сухов* (Саратов) 1, 3; *С. Стелькина* (Могилев) 3; *С. Табачников* (Москва) 1, 3, 4, 7—9; *А. Тарнопольский* (Коростень Житомирской обл.) 4, 7; *И. Темный* (Первомайск Николаевской обл.) 1; *А. Ткач* (Каменец-Подольский) 1; *В. Ткаченко* (Киев) 3; *О. Трунов* (Джалал-Абад КиргССР) 3; *Э. Туркеевич* (Черновцы) 1, 3, 4, 7, 8; *С. Фомин* (Ленинград) 1, 3—5, 7, 9; *Б. Ходоровский* (Днепропетровск) 3; *В. Хонин* (Первоуральск) 4; *С. Церковный* (Ленинград) 1, 3, 4, 9; *И. Цукерман* (Ленинград) 1; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) 3, 7; *В. Цирклевич* (Бельцы) 1; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) 3; *С. Черемшанцев* (Ленинград) 3, 4; *Н. Чернов* (Кривой Рог) 1, 3, 4; *А. Череватов* (Омск) 8; *Ю. Чернявский* (Киев) 1, 3; *З. Чертков* (Киев) 1, 3; *М. Шаймухамбетов* (Алма-Ата) 3; *А. Шерстюк* (Николаев) 1, 3, 4; *Е. Шестаков* (Москва) 1, 3, 4; *В. Ширман* (Харьков) 1, 3—5; *Д. Шляпников* (Новосибирск) 3; *Ю. Шмелев* (Ярославль) 1, 3; *Ю. Шпилев* (Гурьев) 7; *И. Шугалев* (Москва) 1, 3, 4; *И. Щербаков* (Первомайск Николаевской обл.) 1, 3, 4; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 1, 3—5, 7, 9; *А. Щехорский* (с. Старки Житомирской обл.) 1, 3, 4; *И. Юнус* (Харьков) 1, 3—5, 7; *А. Яковлев* (п. Самохваловичи Минского обл.) 1, 3; *А. Ярославцев* (Щелково Московской обл.) 4.

Ю. П. Лысов

Редакция получила свыше 500 писем с решениями задач Ф193—Ф202. Правильные решения этих задач прислали (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера задачи): *Н. Ажищев* (с. Липовка Львовской обл.) 9, 0; *С. Актериев* (Магнитогорск) 9; *С. Алехин* (Липецк) 1; *А. Амиров* (Оренбург) 9; *Ш. Атакулов* (Фергана) 9; *Н. Атищев* (п. Липовка Львовской обл.) 9; *Р. Басыров* (д. Н. Караkitяны ТАССР) 0, 2; *С. Благодер* (Бокситогорск) 9; *А. Блехман* (Алма-Ата) 9; *С. Бобков* (Курган) 2; *Л. Брагинский* (Фрунзе) 8, 9, 0, 1, 4, 5; *А. Браславец* (Новосибирск) 7; *И. Братовская* (Усолье-Сибирское) 7; *М. Бунеев* (п. Кечевка Кечевского р-на) 9; *П. Бухаринов* (Березники) 9; *М. Васнецов* (Киев) 0; *Ю. Визгин* (Ленинград) 4; *И. Волков* (Москва) 9, 0; *А. Восканян* (Ереван) 4, 5; *Б. Герасимов* (Сарапул УдАССР) 6; *А. Герман* (Воронеж) 0, 4, 6, 7; *С. Герц* (Хуст) 1; *Н. Голозко* (Прохладный) 6; *В. Голутва* (Высокополье) 9; *В. Горбулин* (с. Красногвардейское Став-

ропольского края) 9; *А. Григорян* (Баку) 5; *Г. Грико* (Солигорск) 9; *Е. Гугемо* (Днепропетровск) 0; *Е. Гусев* (Павлоград) 4, 6, 7; *Ф. Довлетова* (п. Первомайский БАССР) 1; *В. Дяченко* (Гадяч Полтавской обл.) 9, 0; *С. Жаров* (Ефремов Тульской обл.) 6; *В. Жгуч* (Тасеево) 9; *В. Жук* (Грозный) 0; *Ю. Заец* (Каспи) 9; *П. Зиновец* (Конотоп) 0; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) 8; *Т. Ибрагимов* (Москва) 0; *В. Игнатъев* (Волгоград) 4, 5, 6, 7, 9, 0, 1, 2; *Р. Иорданиян* (Тбилиси) 9; *Е. Каллягина* (Грозный) 7; *В. Канзюба* (Днепропетровск) 8, 9, 2; *В. Карасев* (Ярославль) 0, 1; *С. Карпенко* (Киев) 9; *Е. Карпов* (Москва) 7; *Д. Карпов* (Павлоград) 3, 8, 9; *П. Кирей* (Николаев) 9; *О. Киселева* (с. Задонск) 9; *Н. Кирсти* (п. Зеленодольск Днепропетровской обл.) 3; *Я. Коган* (Глазов) 8, 9, 1; *А. Колесников* (Москва) 8, 9; *В. Кошарнер* (Вольногорск) 2; *Л. Кофман* (Таллин) 9, 0; *А. Кравченко* (Запорожье) 2, 4, 7; *В. Кравченко* (Днепропетровск) 4, 6, 7; *Н. Кудрин* (Коломна) 7; *В. Кузнецов* (Грозный) 7; *С. Кузнецов* (Загорск) 9; *В. Кузьмин* (Грозный) 2; *А. Кукум* (Киев) 1; *П. Кулябин* (Жердевка Тамбовской обл.) 4, 3, 6, 9, 1; *Ю. Лурье* (Грозный) 5, 6; *И. Льюзин* (Минск) 4; *А. Мальков* (Мясс) 8, 9; *А. Мамян* (п. Носмберян АрмССР) 4, 5, 7; *С. Мельник* (Харьков) 8, 9, 0, 1; *С. Молотков* (Златоуст) 6, 1; *А. Морсев* (Москва) 8, 9, 0, 1; *А. Мяжков* (Калининград) 4, 7; *А. Николаев* (Москва) 6, 7, 9, 0; *С. Новиков* (Свердловск) 0; *Е. Новикова* (Ленинград) 7; *С. Нужный* (Куйбышев) 5, 7, 9, 1, 2; *Ю. Оробинский* (Воронеж) 8, 9, 0, 2; *А. Павлов* (Сочи) 5; *А. Пажинский* (Усть-Каменогорск) 7; *Ю. Перфильев* (Саратов) 4; *Ю. Полоцкий* (Зеленодольск) 6, 7, 9; *С. Пожидаев* (Куйбышев) 7; *Н. Попов* (Ленинград) 7; *О. Резник* (Лунинец Брестской обл.) 4; *М. Ригмант* (Магнитогорск) 3, 8, 9, 0; *Е. Рудерман* (Черновцы) 3; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) 7; *В. Силкин* (Калинин) 4; *Я. Симкин* (Москва) 4, 6, 9, 0, 2; *А. Смагин* (Москва) 6, 7; *Ю. Смирнов* (Ленинград) 0, 1, 2; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 4, 5, 7, 9, 1; *Е. Соколов* (Тула) 0; *В. Спиридонов* (ст. Мартыновка Николаевской обл.) 9, 0, 1; *В. Суслепаров* (Кунгур) 9, 0; *Н. Федин* (Омск) 3, 6, 7, 8, 9, 2; *Ю. Филимонов* (Химки Московской обл.) 9, 2; *С. Фофанов* (Москва) 3, 4; *Д. Фушман* (Черновцы) 6; *В. Хажуев* (п. Новомихайловский Туапсинского р-на) 7; *С. Хоменко* (Подольск) 6, 7; *И. Ципенюк* (Солнцево) 4, 6; *Л. Циферблат* (Львов) 9, 1; *В. Цукерук* (Киев) 9, 0; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) 7; *В. Чертков* (Киев) 4, 6, 8, 0; *С. Четкин* (Осторожск) 4, 8, 9, 0, 1, 2; *Е. Шафирович* (Ногинск) 9, 0, 1; *Е. Шахнович* (Калинин) 9, 1; *К. Шварцман* (Кишинев) 7; *В. Шендрик* (Алма-Ата) 4, 6, 7, 9, 0, 1, 2; *В. Шнейман* (Харьков) 9, 0, 2; *А. Шумаков* (Тула) 0, 2; *С. Щукин* (Днепропетровск) 4, 1, 2; *А. Юдин* (Сызрань) 8; *А. Ян* (Ереван) 9.

С. Г. Семенчинский

## Календарная задача

Не всегда легко определить день юбилея. Возьмем, например, день рождения великого астронома Николья Коперника.

В XV веке пользовались Юлианским календарем. По этому календарю (как теперь говорят, по старому стилю) Коперник родился 19 февраля 1473 года. Сейчас пользуются Григорианским календарем. По этому календарю (по новому стилю) днем рождения Коперника надо считать 28 февраля 1473 года. Разница между одними и теми же датами по этим календарям в XV веке составляла 9 суток. Так что 500-летие со дня рождения Коперника по новому стилю надо праздновать 28 февраля 1973 года. Но можно рассуждать и иначе. По старому стилю надо отмечать этот день 19 февраля. Поэтому 19 февраля 1973 года по старому стилю истекло 500 лет со дня рождения Коперника. Но в XX веке разница между календарями стала уже 13 дней, и день рождения поэтому приходится на 4 марта 1473 года.

Какой же день вычислен правильно? Почему вообще возникла разница?

Я. С.



# Числовые данные в геометрических задачах

С. В. Овчинников, И. Ф. Шарыгин

В большинстве стандартных школьных задач числовые данные вообще не играют никакой роли. Как правило, такие задачи можно решить в общем виде, используя «буквенные» обозначения, а затем подставить в полученный ответ данные числа. Однако часто использование «специфики» числовых данных позволяет получить более простое решение. В этой заметке мы на примерах покажем, как по-разному влияют числовые данные на решение задачи.

Начнем с задачи, предлагавшейся на вступительных экзаменах на химический факультет МГУ в 1970 году.

**Задача 1.** Хорда  $AB$  стягивает дугу окружности, равную  $120^\circ$ . Точка  $C$  лежит на этой дуге, а точка  $D$  лежит на хорде  $AB$ . При этом  $AD = 2$ ,  $BD = 1$ ,  $DC = \sqrt{2}$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

Заметим, что  $\angle ODC = 90^\circ$ . Действительно, продолжим отрезок  $CD$  до пересечения с окружностью (рис. 1). Так как  $AD \cdot BD = CD \times DE$ , то  $DE = CD = \sqrt{2}$  и  $OD \perp CE$ . Из  $\triangle AOF$  мы находим радиус окружности. Он равен  $\sqrt{3}$ , поэтому из треугольника  $OFD$  получаем, что  $\angle FDO = 60^\circ$ . Отсюда  $\angle CDA = 30^\circ$ ,  $\angle CDB = 150^\circ$ .

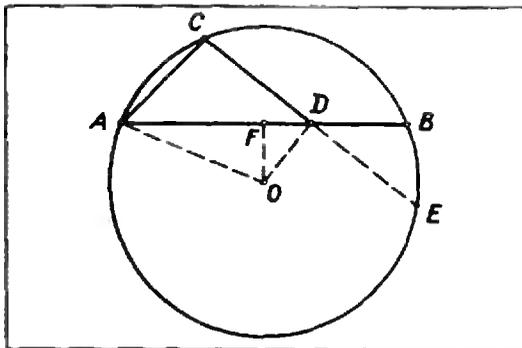


Рис. 1.

Воспользовавшись формулой для определения площади треугольника по двум сторонам и углу между ними,

получим, что  $S_{\triangle ADC} = \frac{V\sqrt{2}}{2}$ ,  
 $S_{\triangle CDB} = \frac{V\sqrt{2}}{4}$ . Отсюда  $S_{\triangle ABC} =$   
 $= \frac{3}{4} V\sqrt{2}$ .

Анализируя приведенное решение, мы видим, что числовые данные в задаче подобраны «весьма удачно». Если мы попытаемся решить эту задачу в общем виде, то есть возьмем в качестве исходных данных произвольные числа, то очень быстро убедимся, что решение оказывается непомерно громоздким. (Попытайтесь все-таки решить эту задачу в общем виде. Это будет полезным упражнением.) А вот типичная задача, в которой числовые данные не играют никакой роли. Они используются лишь на последнем этапе при подстановке в общий ответ и носят иллюстративный характер.

**Задача 2** (геофак МГУ, 1968). В треугольнике  $ABC$  проведены биссектриса  $AD$  угла  $BAC$  и биссектриса  $CF$  угла  $ACB$  (точка  $D$  лежит на стороне  $BC$ , точка  $F$  — на стороне  $AB$ ). Найдите отношение площадей тре-

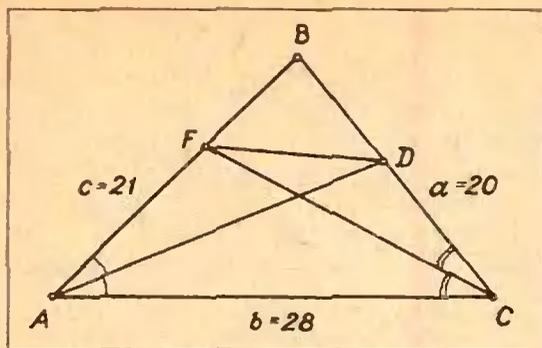


Рис. 2.

угольников  $ABC$  и  $AFD$ , если известно, что  $AB = 21$ ,  $AC = 28$ ,  $CB = 20$ .

Обозначим стороны треугольника  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно через  $c$ ,  $a$  и  $b$  (рис. 2). Используя свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, находим, что

$$AF = \frac{bc}{a+b}, \quad BD = \frac{ac}{b+c}.$$

Отсюда

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c},$$

$$\frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{AF}{AB} = \frac{b}{(a+b)},$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AFD}} = \frac{(a+b)(b+c)}{bc}$$

Подставляя вместо  $a$ ,  $b$  и  $c$  их численные значения, находим

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AFD}} = 4, \text{ а потому искомое отношение равно } 4.$$

Следующая задача может быть решена в общем виде, но решение существенно упрощается, если вовремя воспользоваться численными значениями.

**Задача 3** (мехмат МГУ, 1969). Прямоугольные проекции треугольника  $ABC$  на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найти периметр треугольника  $ABC$ , если известно, что

$$AB = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Обозначим плоскости, на которые спроектирован треугольник  $ABC$ , через  $P$  и  $Q$  (рис. 3). Очевидно, можно считать, что одна из вершин треугольника, например  $A$ , лежит на общем ребре  $R$  плоскостей  $P$  и  $Q$ . Так как проекции сторон  $AB$  и  $AC$  на плоскости  $P$  и  $Q$  равны, точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат в биссекторной плоскости  $S$  двугранного угла, образованного плоскостями  $P$  и  $Q$ . Проекции точек  $B$  и  $C$  на  $Q$  обозначим через  $D$  и  $E$ . Опустим из точки  $B$  перпендикуляр  $BF$  на ребро  $R$ ,  $\angle BFD = 45^\circ$

В дальнейших вычислениях можно было бы не фиксировать длину отрезка  $AB$ , а считать ее произвольной величиной  $a$ . В этом случае решение тоже можно довести до конца. Но данное конкретное значение  $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$  позволяет существенно упростить решение.

Действительно, из треугольника  $ABD$  находим:  $BD = \frac{1}{2}$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ,  $AB$  и  $AD$  даны). Так как  $\angle BFD = 45^\circ$ , то  $FD = BD = \frac{1}{2}$  и в треугольнике  $AFD$  имеем  $\angle AFD = 90^\circ$ ,  $\angle FAD = 30^\circ$ . Отсюда получаем последовательно, что  $AE \perp AF$ ,  $\angle CAE = 45^\circ$ ,  $\angle CEA = 90^\circ$ ,  $AC = \sqrt{2}$ . Из прямоугольной трапеции  $CBDE$  имеем  $(CE - BD)^2 + DE^2 = BC^2$ . Отсюда  $BC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , и периметр треугольника  $ABC$  равен  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ .

Если в рассмотренной задаче числовые данные, существенно умень-

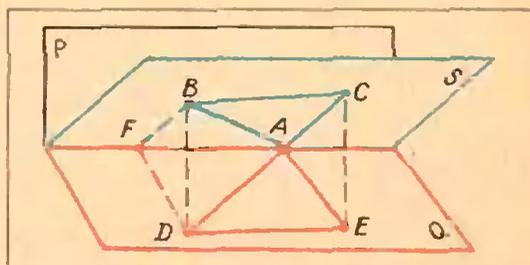


Рис. 3.

шая объем вычислений, помогали нам, то иногда они, наоборот, создают вычислительные трудности и даже затеняют простой геометрический смысл задачи.

**Задача 4** (геофак МГУ, 1971). В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $AB = 3$  см,  $BC = 4$  см и  $AC = 5$  см проведена биссектриса  $BD$ . В треугольники  $ABD$  и  $BCD$  вписаны окружности, которые касаются  $BD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Определить длину отрезка  $MN$ .

Числовые данные этой задачи показывают, что треугольник прямоугольный. Это может привести к попытке решить задачу, используя метрические свойства прямоугольного треугольника.

На самом деле задача имеет простое геометрическое решение для произвольного треугольника  $ABC$ . Обозначим  $AB$  через  $c$ ,  $BC$  через  $a$  и  $AC$  через  $b$  (рис. 4). По свойству биссектрисы  $AD = \frac{bc}{a+c}$ ,  $CD = \frac{ab}{a+c}$ .

Введем неизвестные  $x = BM$ ,  $y = MN$  и  $z = ND$ . Так как касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, то можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + \left(\frac{ab}{a+c} - z\right) = a, \\ x + \left(\frac{bc}{a+c} - z - y\right) = c. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения вто-

рое, получим

$$2y + \frac{ab}{a+c} - \frac{bc}{a+c} = a - c,$$

откуда

$$y = \frac{1}{2} \frac{(a-c)(a+c-b)}{a+c}.$$

Подставляя вместо  $a$ ,  $b$  и  $c$  их значения, находим, что  $MN = \frac{1}{7}$ .

Теперь мы рассмотрим задачи, в которых специально подобранные числовые данные резко упрощают решение задачи.

**Задача 5.** В треугольнике  $ABC$  даны стороны  $AB = 4$ ,  $AC = \sqrt{17}$  и  $BC = 5$ . На стороне  $AB$  взята точка  $D$  такая, что  $AD = 1$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $DBC$  и  $ADC$ .

Если мы догадаемся, что  $CD$  является высотой, то решение находится очень быстро: центры окружностей, описанных около треугольников  $ADC$  и  $DBC$ , лежат на серединах сторон  $AC$  и  $BC$ , и искомое расстояние равно длине средней линии, параллельной  $AB$ , то есть 2 (рис. 5). То, что  $CD$  является высотой, следует из равенства

$$BC^2 - AC^2 = BD^2 - DA^2 = 8.$$

Как же догадаться, что  $CD$  является высотой? Ведь из решения видно, что эта догадка является основным моментом в решении — все остальные рассуждения тривиальны. Мы не со-

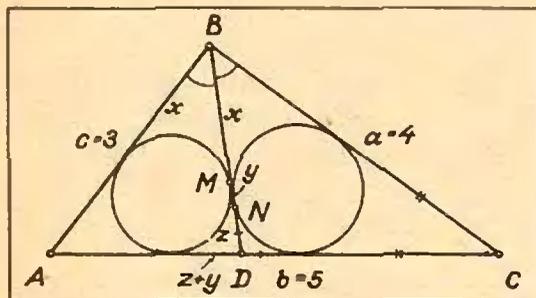


Рис. 4.

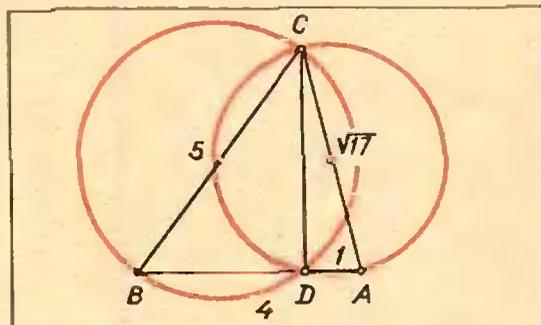


Рис. 5.

бираемся (да и не можем) объяснить, как надо догадываться, но на одно важное обстоятельство укажем. Речь идет о чертеже. Аккуратно и грамотно выполненный чертеж является очень хорошим помощником при решении задачи. Это относится к любой геометрической задаче, как с числовыми, так и с буквенными данными. Если данные — числовые, то на чертеже следует отразить заданные размеры фигуры. Например, если в разобранной задаче сделать чертеж с соблюдением заданных пропорций, то довольно легко увидеть, что  $CD$  — высота.

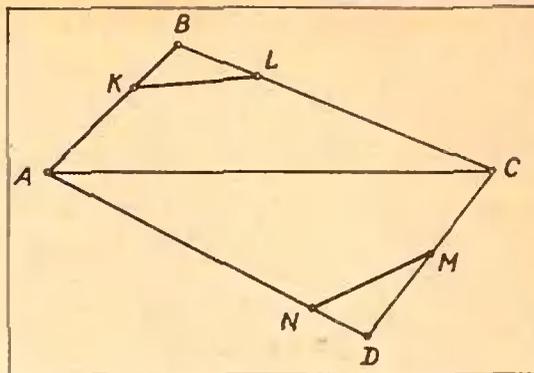


Рис. 7.

**Задача 6** (геофак МГУ, 1970). В трапеции  $ABCD$  известны основания  $AD = 39$  см,  $BC = 26$  см и боковые стороны  $AB = 5$  см,  $CD = 12$  см. Найти радиус окружности, которая проходит через точки  $A$  и  $B$  и касается стороны  $CD$  или ее продолжения.

Достроим трапецию до треугольника  $AED$  (рис. 6). Из подобия треугольников  $BEC$  и  $AED$  легко получаем  $BE = 10$  см,  $CE = 24$  см. Если чертеж выполнен аккуратно, то можно заметить, что  $\angle AED = 90^\circ$ . Это легко доказать:  $AE^2 + ED^2 = AD^2$ . Пусть  $O$  — центр окружности, проходящей через  $A$  и  $B$  и касающейся  $ED$  в точке  $G$ . Опустим из  $O$  перпендикуляр  $OF$  на  $AB$ , тогда  $F$  — середина хорды  $AB$ . Очевидно,  $OG = EF = 12,5$  см. Отсюда искомый радиус равен  $12,5$  см.

В следующих задачах числовые данные проявляются весьма своеобразно.

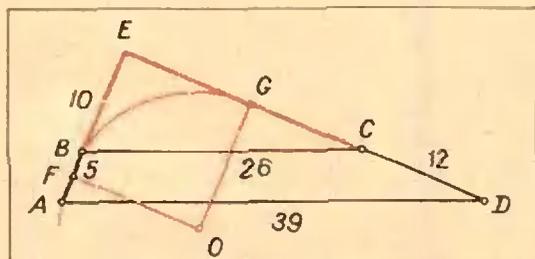


Рис. 6.

разно. При предварительном изучении такой задачи трудно предугадать, как именно повлияют эти данные на решение, но стоит начать решать задачу, и в некоторый момент станет ясно, что только при этих данных можно получить ответ. Как правило, в подобных задачах путь решения очевиден, хотя с самого начала не ясно, приведет ли он к ответу.

**Задача 7** (биофак МГУ, 1970). На сторонах выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , площадь которого равна 1, взяты точки:  $K$  на  $AB$ ,  $L$  на  $BC$ ,  $M$  на  $CD$  и  $N$  на  $AD$ . При этом  $\frac{AK}{KB} = 2$ ,  $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{CM}{MD} = 1$ ,  $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$ .

Найти площадь шестиугольника  $AKLCMN$ .

Отношение площадей треугольников  $KBL$  и  $ABC$  равно  $\frac{BK \cdot BL}{AB \cdot BC} = \frac{1}{12}$  (рис. 7). Отношение площадей треугольников  $MND$  и  $ADC$  равно  $\frac{DN \cdot DM}{AD \cdot CD} = \frac{1}{12}$ . Таким образом, сумма площадей треугольников  $KBL$  и  $MND$  равна  $\frac{1}{12}$ , откуда искомая площадь равна  $\frac{11}{12}$ .

Ясно, что такая задача в общем виде вообще не имеет однозначного решения.

**Задача 8** (мехмат УрГУ, 1968). Три пункта  $A$ ,  $B$  и  $C$  соединены пря-

молинейными дорогами. К отрезку дороги  $AB$  примыкает квадратное поле со стороной, равной  $\frac{1}{2}AB$ . К отрезку дороги  $BC$  примыкает квадратное поле со стороной, равной  $BC$ , а к отрезку дороги  $CA$  примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной  $CA$ , и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км<sup>2</sup> больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.

На первый взгляд данных слишком мало для решения задачи. Однако перейдем к вычислениям. Обозначим стороны треугольника  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  через  $c$ ,  $a$ ,  $b$  соответственно. Тогда из условий задачи имеем:  $4b = 20 + \frac{c^2}{4} + a^2$ . Воспользуемся неравенством треугольника  $b \leq a + c$  и подставим в него  $b$ , выраженное через  $a$  и  $c$ :

$$\frac{1}{4} \left( 20 + \frac{c^2}{4} + a^2 \right) \leq a + c.$$

После простых преобразований этого неравенства получаем:  $\left(\frac{c}{2} - 4\right)^2 + (a - 2)^2 \leq 0$ , откуда  $c = 8$  (км),  $a = 2$  (км), а  $b = a + c = 10$  (км). Площадь леса равна 40 км<sup>2</sup>.

Избранный путь решения является единственно возможным в данной задаче. Но то, что он приводит к ответу, оказалось следствием специально подобранных данных. В результате этого подбора три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  оказались лежащими на одной прямой и данных задачи хватило для получения ответа.

### У п р а ж н е н и я

1 (мехмат МГУ, 1969). Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами 2. Одна из диагоналей четырехугольника равна  $\sqrt{14}$ . Найти другую диагональ.

2. В остроугольном треугольнике  $ABC$  дано  $AB = 15$ ,  $BC = 10$  и угол  $BAC$  равен  $\arccos \frac{7}{9}$ . Вокруг треугольника  $ABC$  опи-

сана окружность и через точку  $D$ , лежащую на  $AC$  на расстоянии 9 от  $A$ , проведена хорда  $BE$ . Найти площадь треугольника  $AEC$ .

3. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами 5, 2 и  $\sqrt{22}$ , причем  $AC = \sqrt{22}$ . На  $AC$  взята точка  $D$  такая, что  $BD = 3$ . Найти расстояние между точкой  $D$  и центром окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ .

4. (физфак МГУ, 1971). В правильную треугольную пирамиду  $SABC$ , все ребра которой равны  $a$ , вписана сфера. На ребре  $SA$  взята точка  $M$  так, что  $AM = MS$ , а на ребре  $BC$  взята точка  $N$  так, что  $2CN = NB$ . Прямая  $MN$  пересекает сферу в двух точках  $P$  и  $Q$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

5 (химфак МГУ, 1971). В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $AB = \sqrt{3}$  см,  $BC = 4$  см,  $AC = \sqrt{7}$  см проведена медиана  $BD$ . Окружности, вписанные в треугольники  $ABD$  и  $BDC$ , касаются  $BD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Определить длину отрезка  $MN$ .

6 (геофак МГУ, 1971). Две окружности радиуса  $r$  касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса  $R$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Определить радиус  $r$ , если  $AB = 12$  см,  $R = 8$  см.

7 (биофак МГУ, 1971). Правильный треугольник  $ABC$  со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка  $D$  лежит на окружности, причем длина хорды  $AD$  равна  $\sqrt{3}$ . Найти длины хорд  $BD$  и  $CD$ .

8 (биофак МГУ, 1970). Дан треугольник  $ABC$ , площадь которого равна единице. На медианах  $AK$ ,  $BL$  и  $CN$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  так, что

$$\frac{AP}{PK} = 1, \quad \frac{BQ}{QL} = \frac{1}{2}, \quad \frac{CR}{RN} = \frac{5}{4}.$$

Найти площадь треугольника  $PQR$ .

9 (экономич. ф-т МГУ, 1970). Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен 150 см<sup>3</sup>, площадь полной поверхности равна 280 см<sup>2</sup>, периметр основания равен 40 см. Найти размеры бруска.

10 (экономич. ф-т МГУ, 1971). В двугранный угол 60° вписан шар радиуса  $R$ . Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранный угла угол 45°.

11. Дан треугольник со сторонами  $AB = 4$ ,  $BC = 3$  и  $AC = 5$ . На стороне  $AB$  взята точка  $D$  так, что  $DB = \frac{7}{8}$ . Через точки  $C$ ,  $D$  и  $B$  проведена окружность, пересекающая  $AC$  в точке  $E$ . Найти длину отрезка  $BE$ .

И. П. Гурский

# Кинематика прямолинейного движения материальной точки

## Равномерное прямолинейное движение

Равномерным прямолинейным движением называется движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения. Уравнение такого движения в векторной форме записывается так:

$$\mathbf{S} = \mathbf{v}t,$$

где  $\mathbf{S}$  — перемещение,  $\mathbf{v}$  — скорость движения,  $t$  — время.

Движение материальной точки всегда рассматривается относительно какого-либо тела, которое в данной задаче принимается за неподвижное и называется телом отсчета. С ним связывается система координат; вместе с телом отсчета они образуют систему отсчета. Для прямолинейного движения достаточно выбрать одну ось координат, например  $OX$ . Тогда положение точки будет определяться его координатой  $x$ . Уравнение равномерного движения в скалярной форме будет выглядеть так:

$$x = x_0 + vt,$$

где  $x_0$  — координата точки в момент времени  $t = 0$ .

Правильный выбор системы отсчета часто существенно облегчает решение задачи. Рассмотрим несколько конкретных задач.

**Задача 1.** *Пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью  $v_1 = 72$  км/ч, видит встречный поезд, идущий со скоростью  $v_2 = 31,4$  км/ч, в течение 10 секунд. Определить длину встречного поезда.*

За тело отсчета примем пассажира, а ось координат направим по на-

правлению скорости встречного поезда. Величины скоростей  $v_1$  и  $v_2$  заданы относительно некоторой неподвижной системы отсчета, например земли. По отношению же к пассажиру, движущемуся со скоростью  $v_1$ , встречный поезд имеет так называемую относительную скорость  $v_2$ , которая равна

$$v_2 = v_2 - v_1,$$

или в скалярной форме

$$v_2 = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1.$$

Тогда искомая длина встречного поезда  $l$  равна

$$l = v_2 t = (v_1 + v_2)t = 290 \text{ м.}$$

**Задача 2.** *Рыбак плывет на лодке вверх по реке; проезжая под мостом, он уронил в воду соломенную шляпу. Через полчаса он это обнаружил и, повернув назад, догнал шляпу в 5 км ниже моста. Какова скорость течения реки, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково?*

Свяжем систему отсчета с водой в реке, то есть со шляпой. Рыбак удаляется от шляпы и приближается к ней с одной и той же скоростью, следовательно, он догонит ее через полчаса после того, как обнаружил потерю, или через час после падения шляпы в воду. За это время шляпа относительно земли проплыла 5 км. Значит, скорость течения реки равна 5 км/ч.

## Равнопеременное прямолинейное движение

Если скорость материальной точки не постоянна, но в любые равные про-

межутки времени она изменяется на одну и ту же величину, то в этом случае говорят о равнопеременном движении. Движение называют равноускоренным, если скорость увеличивается, и равнозамедленным, если скорость уменьшается.

Для решения задач на эту тему достаточно знать уравнения для скорости и перемещения. В скалярной форме они записываются так:

$$v = v_0 + at,$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

Здесь  $v_0$  — начальная скорость точки,  $x_0$  — начальная координата,  $a$  — ускорение,  $v$  и  $x$  — соответственно скорость и координата точки в момент времени  $t$ . Величины  $v_0$ ,  $a$ ,  $v$  и  $x$  будем считать положительными, когда их направление совпадает с положительным направлением выбранной оси координат  $Ox$ , отрицательными — в противном случае.

Начинать решение задачи полезно с краткой записи ее условия, по возможности полностью переводя задачу на язык условных обозначений. При этом надо следить за тем, чтобы единицы измерения всех величин были даны в одной и той же системе единиц. Все расчеты лучше проводить в общем виде, то есть в буквенных обозначениях, а численные значения подставлять в окончательный результат.

Решим следующие задачи.

**Задача 3.** Два велосипедиста едут друг другу навстречу: один из них, имея скорость  $5,4$  км/ч, спускается с горы с ускорением  $0,2$  м/с<sup>2</sup>; другой, имея скорость  $18$  км/ч, поднимается в гору с ускорением  $-20$  см/с<sup>2</sup>. Через сколько времени они встретятся?

Пусть начало координат совпадает с начальным положением первого велосипедиста, а положительное направление оси координат — с направлением его начальной скорости. Тогда краткая запись условия задачи будет выглядеть так:

$$v_{01} = 5,4 \text{ км/ч} = 1,5 \text{ м/с}$$

$$v_{02} = -18 \text{ км/ч} = -5 \text{ м/с}$$

$$a_1 = 0,2 \text{ м/с}^2$$

$$a_2 = 20 \text{ см/с}^2 = 0,20 \text{ м/с}^2$$

$$x_{02} = 195 \text{ м.}$$

$$t = ?$$

Запишем уравнения движения для каждого велосипедиста:

$$x_1 = v_{01}t + \frac{a_1t^2}{2}, \quad (1)$$

$$x_2 = x_{02} + v_{02}t + \frac{a_2t^2}{2}, \quad (2)$$

причем  $a_1 = a_2$  по условию. В момент встречи

$$x_1 = x_2. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), получим

$$t = \frac{x_{02}}{v_{01} - v_{02}} = 30 \text{ с.}$$

На этом можно было бы закончить решение, но в данном случае следует убедиться в том, что полученный ответ имеет физический смысл. Для этого найдем скорость второго велосипедиста через  $30$  с после начала движения:

$$v_2 = v_{02} + a_2t = -5 \text{ м/с} + 0,2 \text{ м/с}^2 \cdot 30 \text{ с} = 1 \text{ м/с.}$$

Оказывается, что второй велосипедист к этому времени будет скатываться с горы, а не подниматься в гору. Очевидно, что данная задача составлена некорректно.

**Задача 4.** Аэростат поднимается с земли вертикально вверх с ускорением  $2,45$  м/с<sup>2</sup>. Через  $8$  секунд от начала движения из его gondoly выпадает предмет. Через сколько времени и с какой скоростью этот предмет упадет на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Так как сначала предмет движется вместе с аэростатом, то через  $t_1 = 8$  с он поднимется на некоторую высоту  $h_1$  и будет иметь скорость  $v_1$ , причем

$$h_1 = \frac{at_1^2}{2} \quad \text{и} \quad v_1 = at_1.$$

Дальнейшее движение предмета можно описать по-разному.

Часто задачи такого типа решаются в два этапа. Сначала рассматривается замедленное движение пред-

мета вверх до наибольшей высоты, затем — свободное падение на землю.

Задача, однако, решается проще, если считать, что предмет одновременно участвует в двух независимых друг от друга движениях: он равномерно со скоростью  $v_1$  поднимается вверх и свободно падает. Свяжем систему отсчета с землей, а ось координат направим вверх. Тогда уравнение движения предмета с высоты  $h_1$  до земли запишется так:

$$0 = h_1 + v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$$

( $t_2$  — время движения предмета). Подставляя в это уравнение выражения для  $h_1$  и  $v_1$ , получим

$$\frac{gt_2^2}{2} - at_1 t_2 - \frac{at_1^2}{2} = 0,$$

откуда  $t_2 \approx 6,5$  с.

*Задача 5. Тело брошено вертикально вверх с некоторой начальной скоростью. Когда оно достигло высшей точки подъема на высоте  $H = 100$  м от земли, из того же начального пункта и с той же начальной скоростью брошено второе тело. На какой высоте они встретятся? Какие они будут иметь скорости в момент встречи? С какой начальной скоростью были брошены тела? Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Рассмотрим сначала некоторые особенности движения тела, брошенного вертикально вверх. Это сложное движение является суммой двух простых — равномерного движения и свободного падения. Причем каждое движение происходит независимо от другого и от того, поднимается или опускается тело. Поэтому можно сказать, что время прохождения телом одного и того же участка пути вверх и вниз одно и то же и что скорости тела на некоторой высоте при движении вверх или вниз одинаковы по величине.

Покажем, например, что время подъема тела до максимальной высоты равно времени падения до начального положения и что конечная скорость по величине равна началь-

ной скорости. Пусть начальная скорость тела равна  $v_0$ . Запишем уравнения для скорости и координаты (начало координат свяжем с точкой бросания и ось координат направим вверх):

$$v = v_0 - gt,$$

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

В точке максимального подъема  $v = 0$ , поэтому

$$0 = v_0 - gt,$$

откуда

$$t = \frac{v_0}{g},$$

и

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Теперь тело начинает свободно падать. Обозначим время падения  $t'$ , а конечную скорость  $v'$  и запишем уравнения для свободного падения

$$v' = gt',$$

$$x_{\max} = \frac{gt'^2}{2}.$$

Отсюда

$$t' = \frac{v_0}{g} = t$$

и

$$v' = v_0.$$

Теперь вернемся к нашей конкретной задаче. Согласно сказанному выше, время подъема второго тела до высоты  $h$  (рис. 1), равное времени падения первого тела с высоты  $H - h$ ,

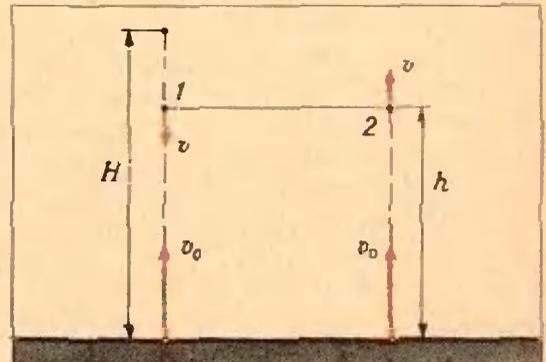


Рис. 1.

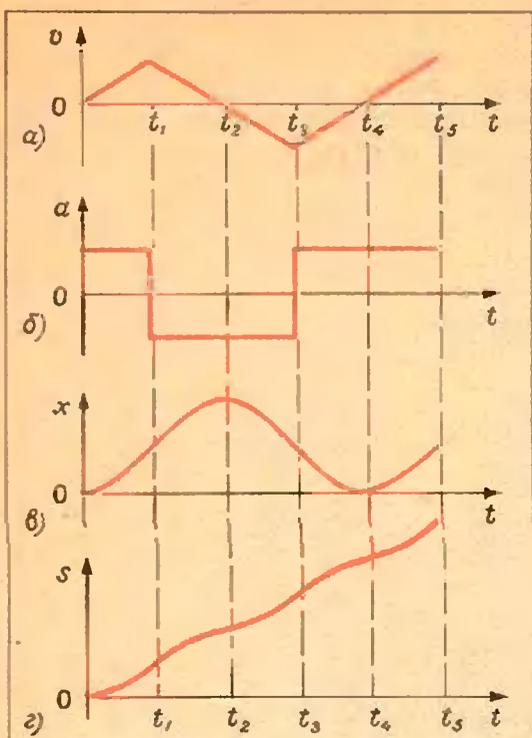


Рис. 2.

составляет половину времени свободного падения первого тела с высоты  $H$  до земли, то есть

$$\frac{H-h}{H} = \frac{gt^2}{g(2t)^2} = \frac{1}{4},$$

откуда

$$h = \frac{3}{4} H = 75 \text{ м.}$$

Скорости тел в момент встречи одинаковы по величине и равны

$$v = \sqrt{2g(H-h)} \approx 22,5 \text{ м/с.}$$

Начальная скорость  $v_0 = \sqrt{2gH} \approx 44 \text{ м/с.}$

В заключение рассмотрим задачу на построение графиков.

**Задача 6.** Дан график зависимости скорости движения тела от времени (рис. 2, а). Построить графики ускорения, перемещения и пути.

Прежде всего, посмотрим, как движется тело в различные моменты времени. Из графика скорости видно, что на первом этапе (от 0 до  $t_1$ ) тело движется равноускоренно; на втором (от  $t_1$  до  $t_2$ ) — равнозамедленно; на третьем (от  $t_2$  до  $t_3$ ) — равноускоренно, но в обратном направлении; на четвер-

том (от  $t_3$  до  $t_4$ ) — равнозамедленно; на пятом (от  $t_4$  до  $t_5$ ) — равноускоренно в первоначальном направлении и т. д. Графики зависимости ускорения, перемещения и пути от времени показаны на рисунках 2, б, в и г соответственно.

### Упражнения

1. По двум параллельным путям в одном направлении идут два поезда: пассажирский — длиной 200 м со скоростью 72 км/ч и товарный — длиной 400 м со скоростью 45 км/ч. Сколько времени пассажирский поезд будет обгонять товарный?

2. Замыкающий колонны войск, растянувшейся на 2,5 км и идущей со скоростью 5 км/ч, послал мотоциклиста с извещением командиру, находящемуся во главе колонны. Командир принял извещение и писал ответ, стоя на обочине дороги, в течение трех минут. Определить среднюю скорость мотоциклиста, если он вернулся к замыкающему через 9 мин 27 с.

3. Два велосипедиста едут навстречу друг другу: один из них, имея скорость 7,2 км/ч, спускается с горы с ускорением  $0,30 \text{ м/с}^2$ ; другой, имея скорость 36 км/ч, поднимается с ускорением  $-0,20 \text{ м/с}^2$ . Каково было расстояние между велосипедистами в начальный момент, если они встретились через 0,5 минуты? При какой наибольшей длине горы задача имеет решение?

4. С некоторой высоты падает тело. Через 2 с с той же высоты падает второе тело. Через сколько секунд после начала падения первого тела удвоится расстояние, разделяющее тела до начала падения второго тела? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Вертолет поднимается вверх со скоростью 10 м/с. На высоте 100 м из него выбрасывается вверх предмет со скоростью 2 м/с относительно вертолета. Найти наибольшую высоту, которой достигнет предмет, а также через сколько времени и с какой скоростью предмет упадет на землю.

6. Тело бросают вверх со скоростью 20 м/с. Какова высота точки, которую тело проходит дважды с промежутком 3 с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

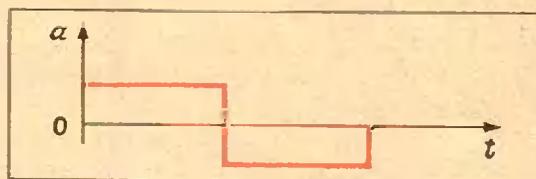


Рис. 3.

7. Дан график зависимости ускорения от времени (рис. 3). Построить график зависимости величины перемещения от скорости.

# Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

В «Кванте» № 4 за 1973 год мы уже рассказывали об Университете дружбы народов. Сейчас мы помещаем варианты вступительных экзаменов в этот университет по математике в 1973 году.

**Факультет физико-математических и естественных наук**

## В а р и а н т 1

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz + xz = 12, \\ xyz = 8. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$x^3 + \log_a x < a^2 x^2.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4 \cos^2 2x + \sin^2 2x}$$

4. Двугранные углы при боковых ребрах правильной четырехугольной пирамиды равны  $\alpha$ . Найти двугранные углы при ребрах основания пирамиды.

## В а р и а н т 2

1. При каких комплексных значениях  $z$  оба выражения

$$(3 + i)z + 1 - 5i \quad \text{и} \quad z^2 + 1 - 4i$$

одновременно имеют действительные значения?

2. Решить неравенство

$$(2^x + 2^{1-x}) \log_x (x^3 + 1) \log_{x+1} x - 2 > 1.$$

3. Найти все пары чисел  $x, y$ , которые удовлетворяют уравнению

$$\cos^4 x + \cos^4 y - \frac{1}{\cos^2 x \cos^2 y} = 1.$$

4. Найти двугранные углы при боковом ребре правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол при ребре основания равен  $\alpha$ .

## В а р и а н т 3

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2a} + \sqrt{x+2b} < 2\sqrt{x+a+b}.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 51x^x - 31y^y = 0, \\ (3x)^{1/x^3} - (5y)^{1/y^5} = 0. \end{cases}$$

3. Найти все пары чисел  $x, y$  которые удовлетворяют уравнению

$$\sin^2(x+y) - \cos^2(x-y) = 1.$$

4. Найти полную поверхность усеченного конуса, описанного около полушара радиуса  $R$  (так что основание полушара лежит на большем основании усеченного конуса, а боковая поверхность усеченного конуса и его второе основание касаются полусферы), если площади нижнего и верхнего оснований усеченного конуса относятся как 1 : 18.

**Инженерный факультет**

## В а р и а н т 1

1. Решить уравнение

$$(x^2 - 4x)^2 + 2(x - 2)^2 = 43.$$

2. Решить неравенство

$$(0,125)^x + 2^{2-3x} + (0,5)^{3x+4} < 40,5.$$

3. Решить уравнение

$$1 + \sin x - \cos x = \sin 2x - \cos 2x.$$

4. Основание и одна из боковых граней пирамиды суть равносторонние треугольники. Один из плоских углов при вершине пирамиды, не равный  $60^\circ$ , имеет величину  $\alpha$ . Найти объем пирамиды, если длина стороны ее основания равна  $a$ .

## В а р и а н т 2

1. Решить неравенство

$$x^2 + \frac{1}{x^2} > \frac{17}{4}.$$

2. Решить уравнение

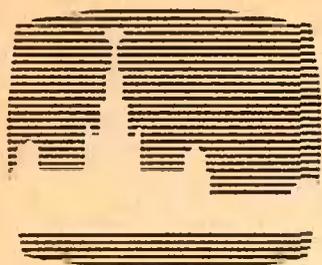
$$\log_{x-1} (2x^3 - 6x^2 - 7x - 1) = 3.$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - 2\sqrt{2} \sin x = 1.$$

4. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды, описанной около шара радиуса  $R$ , равны  $a$ . Найти полную поверхность пирамиды.

*М. В. Драгнев*



## ТЕЛЕВИДЕНИЕ ГОТОВИТ В ВУЗ

В «Кванте» № 9 за этот год мы поместили информацию о приеме на телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы. Лекции на телекурсах читаются с 1 октября и продолжаются весь учебный год. Каждую неделю зрителям предлагаются следующие передачи: по физике — в понедельник вечером и в пятницу утром; по математике — во вторник и в среду утром. В ту же неделю эти передачи повторяются: по физике — в среду и в воскресенье утром; по математике — в четверг и в субботу вечером.

В основу передач по физике и математике положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Телезанятия помогают закрепить, углубить, расширить и систематизировать школьные знания учащихся.

Регулярно слушателям телекурсов предлагаются домашние задания (они публикуются в еженедельнике «Говорит и показывает Москва»). В нашем журнале будет публиковаться информация о работе телекурсов и задачи для самостоятельного решения на пройденные темы. В этом номере мы рассказываем о занятиях, проведенных в октябре и ноябре месяцев.

### Физика

На отделении физики телевизионных подготовительных курсов в октябре и ноябре изучался первый раздел программы «Механика». Предлагаем читателям журнала несколько задач на эту тему.

1. На дне цилиндрического вертикального сосуда, внутренний диаметр которого  $D = 10$  см, находятся четыре металлических шарика диаметром  $d = 3,65$  см. Определить силу давления шариков на боковую поверхность сосуда, если плотность металла  $\rho = 7,7$  г/см<sup>3</sup>. Трением пренебречь.

2. Однородная заготовка движется по каткам горизонтального транспортера со скоростью  $v = 10$  м/с и выскакивает на металлическую платформу, находящуюся на одном уровне с транспортером. Определить, какой максимальной длины может быть заготовка, чтобы целиком оказаться на платформе, если коэффициент трения между заготовкой и платформой  $k = 0,80$ . Сопротивление катков транспортера при движении пренебрежимо мало.

3. На движущейся тележке на нерастяжимой и невесомой нити длины  $l = 80$  см висит маленький тяжелый шарик. Тележка сначала двигалась с ускорением  $a_1 = 2,0$  м/с<sup>2</sup>, а затем с ускорением  $a_2 = -1,0$  м/с<sup>2</sup>. Определить расстояние между равновесными положениями шарика в обоих случаях.

4. На невесомом жестком стержне, который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $O$ , укреплены два тела с массами  $m_1 = 3$  кг и  $m_2 = 2$  кг на расстояниях от точки закрепления  $r_1 = 1$  м и  $r_2 = 2$  м (рис. 1). В какую сторону начнет вращаться стержень, если

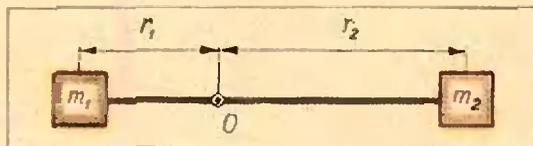


Рис. 1.

его отпустить? Определить скорость того тела, которое окажется в нижней точке в момент, когда стержень займет вертикальное положение.

5. На упругой невесомой нити длины  $l_0 = 1$  м, отклоненной от вертикали, закреплено тело массы  $m = 1,5$  кг. Нить отпустили; и в момент прохождения вертикального положения ее натяжение было равно  $F = 30$  н. Определить, на какой угол была отклонена нить. Упругость нити  $k = 100$  н/м.

6. Тело начинает двигаться с вершины наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту  $\alpha_1 = 30^\circ$ , и переходит на горизонтальную поверхность. Расстояние, пройденное телом по горизонтальной поверхности до полной остановки,  $l_1 = 20$  м. Затем это тело начинает двигаться с такой же высоты по наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту  $\alpha_2 = 20^\circ$ . Найти высоту, с которой движется тело, и расстояние, пройденное им по горизонтальной поверхности во втором случае, если коэффициенты трения в первом и втором случаях не меняются при переходе с наклонной плоскости на горизонтальную поверхность и равны  $k_1 = 0,15$  и  $k_2 = 0,25$  соответственно.

## М а т е м а т и к а

На отделении математики в октябре рассматривались темы: «Тождественные преобразования», «Числовые неравенства».

По пройденным темам читателям предлагается ряд задач для самостоятельного решения.

1. Доказать, что при натуральных  $n (n > 1)$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n}.$$

2. Доказать, что при всех натуральных  $n$  и любых  $a > 0$   $b > 0$  справедливо неравенство

$$(a + b)^n < 2^n(a^n + b^n).$$

3. Доказать, что  $2^{105} + 3^{105}$  делится на 5, 35, 275, 2315.

4. Найти два натуральных числа, если известно, что сумма их равна 589, а частное от деления их наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель равно 13.

5. Пусть  $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ ,  $\cos \alpha \neq 0$ . Доказать, что если  $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ , то  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$ .

6. Доказать, что при  $x \neq 2\pi k$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , справедливы тождества:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx &= \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots$$

$$\dots + n \sin nx =$$

$$= \frac{(n+1) \sin nx - n \sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

В ноябре на отделении математики рассматривались вопросы планиметрии и тригонометрические преобразования. Предлагаем читателям задачи по этим темам для самостоятельного решения.

7. Упростить выражение  $\sin^2(\alpha - \beta) - \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta)$ .

8. Доказать, что при всех допустимых значениях  $x$

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + x \right).$$

9. Вычислить без таблицы

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}.$$

10. Найти третью сторону треугольника, если даны две его стороны  $a$  и  $b$  и известно, что медианы, соответствующие этим сторонам, пересекаются под прямым углом.

11. Через вершину  $A$  параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая диагональ  $BD$ , сторону  $BC$  и продолжение стороны  $CD$  в точках  $E$ ,  $F$  и  $K$  соответственно. Найти величину отрезка  $EF$ , если  $AE = 2$ ,  $EK = 3$ .

12. Дан угол  $ABC$ , равный  $60^\circ$ . Точка  $D$  лежит внутри угла и удалена от его сторон на расстояния  $a$  и  $b$ . Найти длину  $BD$ .

13. Считая, что  $b^2 > a^2 > 0$ , упростить выражение

$$\frac{\sin 2x \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x}}{2a \sqrt{1 + \left( \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} \sin x \right)^2}}.$$

14. Около трапеции с высотой  $h$  описана окружность. Бóльшее основание трапеции видно из центра окружности под углом  $\alpha$ , а меньшее — под углом  $\beta$ . Определить площадь трапеции.

15. Найти площадь трапеции, у которой основания равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ), диагонали взаимно перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен  $\alpha$ .

16. Из центра окружности проведены два радиуса  $OA$  и  $OB$ , образующие угол  $\alpha$ . В меньший сегмент круга, отсекаемого хордой  $AB$ , вписан правильный треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна  $AB$ . Найти сторону этого треугольника, если радиус окружности равен  $R$ .

А. Н. Борзяк,  
В. И. Давыдов,  
П. Т. Дыбов,  
И. И. Наслузов

# XV МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

## XV математическая

*И. С. Петраков В. А. Скворцов*

Завершилась еще одна Международная математическая олимпиада школьников. На этот раз она проходила в Москве с 5 по 16 июля. В олимпиаде приняли участие команды 16 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, ГДР, Кубы, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, Советского Союза, Финляндии, Франции, Чехословакии, Швеции, Югославии.

Это была самая представительная олимпиада за всю историю международных математических олимпиад.

В команду каждой страны входило 8 участников (за исключением команды Кубы, состоящей из 5 участников) — победителей национальных олимпиад.

В команду СССР вошли 8 учащихся десятых классов — первых и вторых призеров седьмой Всесоюзной олимпиады. Из числа вторых призеров были включены те, которые имели лучшую олимпийскую биографию.

Будаев Виктор — выпускник школы № 7 города Смоленска. В 1970, 1971, 1972, 1973 гг. он получил первые премии на Смоленских



Команда СССР на XV Международной математической олимпиаде школьников: сидят (слева направо) Наум Гольцман, Виктор Будаев, В. А. Скворцов (руководитель команды), Павел Грозман, Георгий Егоров,

Сергей Конягин, Константин Юрша, Дмитрий Лещинер; стоят Л. М. Пашкова (зам. руководителя команды), Е. А. Морозова и И. С. Петраков (члены жюри), Евгений Хухро.

городских и областных олимпиадах, в 1971 г. — II премию, в 1972 г. — III и в 1973 г. — I премию на Всесоюзных олимпиадах.

**Гольцман Наум** — выпускник школы № 179 города Москвы. В 1971 г. получил II премию на Московской городской и I премию на Всесоюзной олимпиадах, в 1972 г. — похвальный отзыв на Московской и II премию на Всесоюзных олимпиадах, в 1973 г. — премию на Московской и I премию на Всесоюзной олимпиадах.

**Грозман Павел** — выпускник школы-интерната № 18 при Московском университете. В 1972 г. получил I премию на Симферопольской городской и вторые премии на Крымской областной, Украинской республиканской и Всесоюзной олимпиадах, в 1973 г. — премию на Московской городской и II премию на Всесоюзной олимпиадах.

**Егоров Георгий** — выпускник школы № 2 города Москвы. В 1970 г. получил I премию, в 1971, 1972 гг. — третьи премии и в 1973 г. — премию на Московских городских олимпиадах, в 1972 г. — похвальный отзыв, а в 1973 г. — I премию на Всесоюзных олимпиадах.

**Конягин Сергей** — выпускник школы № 19 города Саратова. В 1970, 1971, 1972, 1973 гг. получил первые премии на Саратовских городских и областных олимпиадах, в 1971, 1972 гг. — первые премии на Всесоюзных олимпиадах, в 1973 г. — II премию на Всесоюзной олимпиаде, в 1972 г. — I премию на Международной математической олимпиаде.

**Лещинер Дмитрий** — выпускник школы № 57 города Москвы. В 1971, 1972 гг. получил первые премии, в 1973 г. — премию на Московских городских олимпиадах, в 1971 г. — III премию, в 1972 г. — I премию, в 1973 г. — II премию на Всесоюзных олимпиадах.

**Хухро Евгений** — выпускник школы-интерната № 165 при Новосибирском университете.

В 1969, 1970, 1971, 1972, 1973 гг. получил первые премии на Новосибирских областных олимпиадах, в 1971 г. — II премию на Всесоюзной и Всесибирской олимпиадах, в 1973 г. — II премию на Всесоюзной олимпиаде.

**Юрша Константин** — выпускник школы-интерната № 45 при Ленинградском университете. В 1971 г. получил II премию на Ленинградской городской и III премию на Всесоюзной олимпиадах, в 1972 г. — III премию на Ленинградской городской олимпиаде, в 1973 г. — III премию на Ленинградской городской и II премию на Всесоюзной олимпиадах.

Наша команда в конце июня собралась на тренировочный сбор в школе памяти В. И. Ленина в Горках Ленинских. Там помимо ежедневных занятий математикой члены команды имели возможность отдохнуть, набраться сил перед ответственными соревнованиями. Темы занятий были самые различные. Здесь были вопросы математической логики и решение различных задач логического характера, теоретико-числовые задачи, комбинаторика, алгебраические и тригонометрические уравнения, неравенства, вопросы геометрических преобразований на плоскости и в пространстве, геометрические задачи, различные олимпиадные задачи. Во время сборов несколько раз проводились тренировочные соревнования.

Эта форма подготовки вполне себя оправдала.

7 июля наша команда переехала в Москву в гостиницу «Университетская», где жили все участники олимпиады.

Для проведения олимпиады был создан оргкомитет (председатель оргкомитета вице-президент АПН профессор *А. И. Маукушевич*) и Международное жюри, в состав которого вошли руководители всех команд (председатель жюри — член-корреспондент АПН профессор *И. Я. Верченко*).



Торжественное открытие XV Международной математической олимпиады школьников. Выступает председатель оргкомитета олимпиады вице-президент АПН СССР профессор А. И. Маркушевич.



Школьники за работой



7 июля на заседании Международного жюри из 14 предварительно отобранных задач, присланных странами-участниками, выделили 6, которые были предложены участникам олимпиады, и утвердили количество очков, присуждавшихся за решение каждой задачи. Соревнования проводились в два дня 9 и 10 июля в школе № 68 Куйбышевского района Москвы, причем в каждый день на решение трех задач отводилось по 4 часа. Затем руководители команд совместно со своими заместителями проверяли работы и давали им предварительную оценку. Единство критериев оценки работ всех участников олимпиады обеспечивалось координаторами, выделенными из числа московских математиков. Каждую задачу курировали 3 координатора, которые проверяли ее решение у всех участников

Обсуждение работ школьников. Слева направо: В. Гутенмахер (координатор), руководитель французской команды профессор М. Глазер, В. Дорофеев (координатор).



и согласовывали оценки с руководителями. Всю работу координаторов возглавляли Н. Васильев и А. Тоом. В состав координаторов вошли: Е. Бургина, В. Гутенмахер, Г. Дорофеев, А. Егоров, А. Кочергин, А. Леонтович, Л. Митюшиц, Ж. Работи и Г. Гуревич.

Заккрытие XV Международной математической олимпиады школьников.

Победители олимпиады (слева направо): Дэвид Готто (Великобритания) — диплом I степени и премия журнала «Квант», Георгий Егоров (СССР), Павел Грозман (СССР), Сергей Коягин (СССР) — дипломы I степени, Янош Коллар (Венгрия) — диплом I степени и премия журнала «Квант».





Председатель оргкомитета олимпиады профессор А. И. Маркушевич вручает диплом II степени Паулю Крегеру (ГДР), получившему также премию журнала «Квант».



Зам. Главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский вручает премию журнала Жану-Кристофу Еккоц (Франция).

Лауреат премии журнала «Квант» Луис Састр (Куба).



13 июля Международное жюри подвело итоги соревнований и присудило призы победителям. Было решено дипломы I степени вручить участникам, набравшим от 35 до 40 очков. Их получили:

Конягин Сергей (СССР), Грозман Павел (СССР), Егоров Георгий (СССР), Коллар Янош (Венгрия), Готто Дэвид (Великобритания).

Дипломы II степени было решено вручить участникам, набравшим от 27 до 34 очков. Их получили:

Окнеану Адриан (Румыния), Будаев Виктор (СССР), Еккоц Жан-Кристоф (Франция), Андрейчак Гжегош (Польша), Штайнер Михаел (Швеция), Вегерт Елиас (ГДР), Верман Пиотр (Польша), Воннет Мишель (Франция), Пальфи Петер Пал (Венгрия), Ферст Пауль (Чехословакия), Кисс Эмиль (Венгрия), Боттхер Альбрехт (ГДР), Лещинер Дмитрий (СССР), Крёгер Пауль (ГДР), Леблонд Денис (Франция).

Дипломы III степени были вручены, набравшим от 17 до 26 очков. Среди получивших дипломы III степени — члены советской команды Гольцман Наум, Юрша Константин и Хухро Евгений.

Таким образом, все советские участники олимпиады стали призерами XV Международной математической олимпиады.

Команда Советского Союза набрала наибольшее число очков — 254.

На закрытии олимпиады (оно состоялось в Московском Дворце пионеров) председатель оргкомитета профессор А. И. Маркушевич от имени оргкомитета вручил призы победителям олимпиады.

Редколлегия журнала «Квант» установила ряд премий для иностранных участников олимпиады. От имени редколлегии журнала премии были вручены заместителем главного редактора журнала М. Л. Смолянским. Первыми лауреатами премии «Кванта» стали:

Дэвид Готто (Великобритания), Янош Коллар (Венгрия), Жан-Кристоф Эккоц (Франция), Пауль Крёгер (ГДР) и Луис Састр (Куба).

В заключение от имени Международного жюри руководитель делегации ГДР профессор Бауш сердечно поблагодарил оргкомитет XV ММО за проделанную большую работу и передал приглашение странам-участницам присхать на XVI Международную математическую олимпиаду, которая состоится в 1974 году в г. Эрфурде (ГДР).

Приведем теперь задачи XV Международной математической олимпиады и их краткие решения.

### Задачи

1 (Чехословакия. Полное решение оценивалось 6-ю очками). Точка  $O$  лежит на прямой  $l$ ;  $OP_1, OP_2, \dots, OP_n$  — единичные векторы такие, что все точки  $P_1, P_2, \dots, P_n$  лежат в одной плоскости, содержащей  $l$ , и все по одну сторону от  $l$ . Докажите, что если  $n$  — нечетное, то  $|OP_1 + \dots + OP_n| \geq 1$ , где  $|OM|$  обозначает длину вектора  $OM$ .

2 (Польша, 6 очков). Выяснить, существует ли конечное множество  $M$  точек в пространстве, не лежащее в одной плоскости, такое, что для любых двух точек  $A, B$ , принадлежащих  $M$ , найдутся две другие точки  $C, D$ , принадлежащие  $M$ , такие, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны и не совпадают.

3 (Швеция, 8 очков). Найти минимальное значение  $a^2 + b^2$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа, для которых уравнение  $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$  имеет по крайней мере один действительный корень.

4 (Югославия, 6 очков). Солдат должен проверить отсутствие мин на участке, имеющем форму равностороннего треугольника, включая границу. Радиус действия его детектора равен половине высоты треугольника. Солдат выходит из одной вершины треугольника. Какой путь он должен выбрать, чтобы пройти наименьшее возможное расстояние и выполнить задание?

5 (Польша, 6 очков). Пустое множество  $G$  не равных постоянной функций действительного аргумента  $x$  вида  $f(x) = ax + b$ , где  $a, b$  — действительные числа, удовлетворяет следующим условиям:

а) если  $f, g \in G$ , то  $g \circ f \in G$ , где  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , то есть множество  $G$  замкнуто относительно суперпозиции;

б) если  $f \in G$ , где  $f(x) = ax + b$ , то обратная функция  $f^{-1} \in G$ , где  $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$ ;

в) для любой  $f \in G$  существует  $x_f$  такое, что  $f(x_f) = x_f$ . Докажите, что существует действительное  $k$  такое, что  $f(k) = k$  для всех  $f \in G$ .

6 (Швеция, 8 очков). Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — данные  $n$  положительных чисел и  $q$  — данное действительное число, причем  $0 < q < 1$ . Найти такие  $n$  действительных чисел  $b_1, \dots, b_n$ , что

а)  $a_k > b_k$  при всех  $k$  от 1 до  $n$ ;

б)  $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$  при всех  $k$  от 1 до  $n-1$ ;

в)  $b_1 \div \dots \div b_n < \frac{1-q}{1-q^n} (a_1 \div \dots \div a_n)$ .

### Решения задач

1. Доказательство можно провести по индукции. При  $n = 1$  утверждение очевидно. Пусть оно верно при некотором  $n = k$ . Осуществим индуктивный переход от  $n = k$  к  $n = k + 2$ . Выберем на прямой  $l$  направление, перенумеруем данные векторы в порядке возрастания угла (угол отсчитывается против часовой стрелки), который они образуют с положительным направлением прямой  $l$  (рис. 1). Суммой векторов  $OP_1$  и  $OP_{k+2}$  является вектор  $OR$ , изображаемый

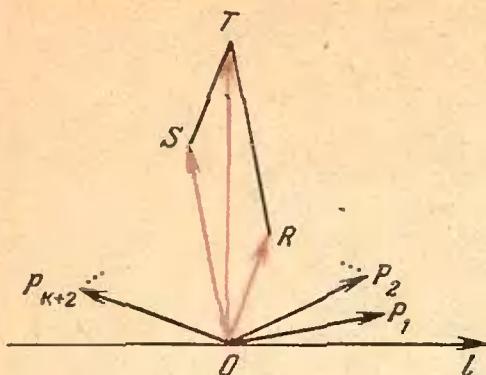


Рис. 1.

диагональю ромба со сторонами  $OR$  и  $OS$ . Поэтому каждый из углов  $ROP_1$  и  $ROP_{k+2}$  не превосходит  $\frac{\pi}{2}$ . Пусть  $OS =$

$$= \sum_{i=2}^{k+1} OP_i.$$

Из введенной нумерации векторов следует, что вектор  $OS$  заключен либо внутри угла  $ROP_1$ , либо внутри угла  $ROP_{k+2}$  и, следовательно, угол  $ROS$  острый. Сумма  $OR + OS$  изображается диагональю  $OT$  соответствующего параллелограмма. В треугольнике  $OST$  угол  $OST$  тупой. Поэтому сторона  $OT$  является наибольшей, то есть  $|OT| > |OS|$ . Но  $|OS| \geq 1$  по предположению индукции. Значит,

$$\left| \sum_{i=1}^{k+2} OP_i \right| = |OT| \geq 1.$$

2. Легко проверить, что таким множеством будет, например, множество вершин двух правильных шестиугольников, имеющих общий центр, но лежащих в разных плоскостях.

Нетрудно показать, что число элементов в множестве с требуемыми свойствами может быть сколь угодно велико. Интересно было бы выяснить, каково наименьшее возможное число элементов в таком множестве (в приведенном выше примере их, по крайней мере, 10). Может ли число элементов быть нечетным?

3. Заметив, что  $x = 0$  не является корнем данного уравнения, преобразуем его к

$$\text{виду } x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ или}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0.$$

Нетрудно проверить, что при любом действительном  $x$  справедливо неравенство  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ . Для фиксированного  $x_0$  мно-

жество пар чисел  $(a, b)$  для которых исходное уравнение имеет корень, равный  $x_0$ , определяется линейным уравнением  $y_0^2 +$

$$+ ay_0 + b - 2 = 0, \text{ где } y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}.$$
 Это

множество пар изображается прямой на координатной плоскости  $(a, b)$ . Поскольку в этой плоскости выражение  $a^2 + b^2$  можно геометрически истолковать как квадрат расстояния от начала координат до точки  $(a, b)$ , то из геометрических соображений ясно, что при фиксированном  $y_0$  минимальное значение  $a^2 + b^2$  для точек  $(a, b)$  на нашей прямой будет равняться квадрату длины перпендикуляра, опущенного из начала координат на рассматриваемую прямую.

Легко подсчитать, что оно равно

$$\rho = \frac{(y_0^2 - 2)^2}{1 + y_0^2}; \rho \geq \frac{4}{5} \text{ при } y_0^2 = \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 \geq$$

$$\geq 4. \text{ Нетрудно доказать, что } \frac{(t-2)^2}{1+t} \geq \frac{4}{5}$$

при  $t \geq 4$ , а при  $t = 4$  достигается равенство.

Таким образом, значение  $a^2 + b^2$  для всевозможных действительных корней  $x_0$  не меньше  $\frac{4}{5}$ . Замечая, что

$x_0 = 1$  является корнем исходного уравнения при  $a = -\frac{4}{5}$ ,  $b = -\frac{2}{5}$ , получаем,

что  $\frac{4}{5}$  является наименьшим искомым значением для  $a^2 + b^2$ .

4. Пусть солдат вышел из вершины  $A$  (см. схему на рис. 2). Для проверки точек  $B$  и  $C$  он должен побывать на дугах радиуса  $\frac{h}{2}$  ( $h$  —

высота треугольника) с центром в этих точках. Пусть сначала он побывал на дуге с центром в  $B$ , а затем — с центром в  $C$ . Если к этому пути добавить путь до точки  $C$ , то дело сведется к нахождению кратчайшего пути от  $A$  к  $C$  с захлестом на первую дугу. Предоставляем читателю доказать, что таким кратчайшим путем будет ломаная  $ADC$  где  $D$  — середина высоты, исходящая из вершины  $B$ . Пусть  $E$  — точка пересечения отрезка  $DC$  со второй дугой. Тогда путь  $ADE$  является кратчайшим, при котором проверяются точки  $B$  и  $C$ . Легко проверить, что при этом проверяются также и все точки треугольника, то есть путь  $ADE$  — искомым.

5. Заметим, что из условия в) следует, что если у функции из  $G$   $a = 1$ , то  $b = 0$ . Но у функции  $f(x) = x$  имеется общая неподвижная точка с любой функцией из  $G$ .

Поэтому можно считать, что в  $G$  входят, по крайней мере, две линейные функции, отличные от  $f(x) = x$ . Иначе задача становится тривиальной. Пусть это — функции

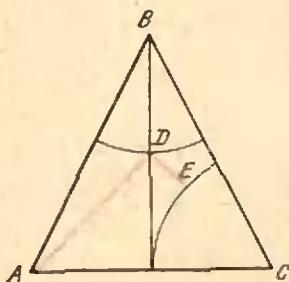


Рис. 2.

$f_1 = a_1x + b_1$  и  $f_2 = a_2x + b_2$  ( $a_1 \neq 1$ ,  $a_2 \neq 1$ ). Легко видеть, что  $x_{f_1} = \frac{b_1}{1-a_1}$

и  $x_{f_2} = \frac{b_2}{1-a_2}$ . Согласно условиям а) и б),  $g = f_1 \circ f_2 \in G$ ,  $h = f_2 \circ f_1 \in G$  и  $g \circ h^{-1} \in G$ . Осуществив все необходимые подстановки, получим, что  $g \circ h^{-1} = x + [(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2)]$ . Но тогда, как мы уже отмечали, в силу условия в) должно выполняться равенство  $(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2) = 0$ , откуда  $x_{f_1} = x_{f_2}$ .

Поскольку это верно для любой пары функций из  $G$ , то тем самым все точки  $x_f$  совпадают, что и требовалось доказать.

6. Смысл задачи состоит в том, чтобы путем некоторого увеличения каждого числа  $a_k$  устранить резкие различия в величине соседних членов. Ясно, что числа  $b_k$  не однозначно определяются числами  $a_k$ .

Некоторые способы решения состоят в нахождении алгоритма последовательного увеличения чисел  $a_k$  так, что в конце концов получаются искомые числа  $b_k$ .

Наиболее краткое решение получается, если догадаться, что в качестве искомых чисел  $b_k$  можно взять выражения

$$b_k = a_1q^{k-1} + \dots + a_{k-1}q + a_k + a_{k+1}q + \dots + a_nq^{n-k}.$$

Условие а) очевидно, а условия б) и в) проверяются непосредственным подсчетом, что мы предоставим читателю.

## История международных олимпиад

М. Л. Смолянский

Первая Международная математическая олимпиада (ММО) школьников была проведена в Румынии летом 1959 года. Она была организована Румынским математическим обществом и Министерством просвещения Румынии.

В ней приняли участие команды Болгарии, Венгрии, Германской Демократической Республики, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии.

С тех пор стало традицией каждое лето проводить в одной из социалистических стран Международную математическую олимпиаду.

Команда каждой страны состоит из 8 участников, руководителя команды и его заместителя. Все руководители команды являются членами Международного жюри. Каждая команда состоит, как правило, из учащихся выпускных классов средних школ, являющихся победителями национальных олимпиад.

До начала олимпиады каждая страна присылает в оргкомитет олимпиады свои задачи. Из их числа Международное жюри отбирает 6 задач, идущих на олимпиаду. Трудность каждой задачи оценивается в очках. Жюри устанавливает максимальное число очков, которое может быть присуждено за решение каждой задачи.

Участники олимпиады, набравшие соответствующее число очков (число очков определяет Международное жюри), награждаются дипломами I, II и III степени и почетными грамотами.

Международная математическая олимпиада школьников довольно быстро завоевала большой международный авторитет.

Так, в первых четырех олимпиадах принимали участие только команды большинства европейских социалистических стран, в V ММО принимала участие команда Югославии, в VI — Монголии, VII — Финляндии, с IX — Англии, Франции, Италии и Швеции, в XI — Бельгии и Нидерландов с XII — Австрии и с XIII — Кубы.

На IV ММО был принят Устав Международных математических олимпиад, который практически не изменился и по сей день.

Основные положения Устава:

1. Международная математическая олимпиада проводится ежегодно в одной из стран — участниц олимпиады.

2. Каждая команда состоит из 8 участников: учащихся средних общеобразовательных и специальных школ, не старше 19 лет, руководителя команды и его заместителя.

3. Все руководители команд (по одному от каждой страны) образуют Международное жюри.

4. До олимпиады каждая страна-участница должна прислать в оргкомитет страны-организатора свои задачи.

5. Руководитель команды и его заместитель принимают непосредственное участие в работе жюри по отбору задач и проверке работ.

6. Страна-организатор берет на себя все расходы, связанные с проведением олимпиады. Страны-участницы несут расходы по оплате проезда своих делегаций до места проведения олимпиады и обратно.

Обычно олимпиада продолжается 2 дня. В каждый из этих дней участники решают по 3 задачи, на решение которых отводится по 4 часа.

Несмотря на то, что задачи ММО очень интересны, они по степени трудности уступают задачам, предлагавшимся на Всесоюзных олимпиадах.

Все задачи Международных математических олимпиад (с I по XI включительно) помещены в книге «Международные математические олимпиады»<sup>\*</sup>).

Начиная с XI ММО журнал «Квант» регулярно помещает подробную информацию о ходе олимпиад и разбор предлагавшихся на них задач<sup>\*\*</sup>).

По своему статусу олимпиада не является командным первенством. Дипломы (I, II и III степени) выдаются индивидуально участникам олимпиады за лучшие решения задач. Но, как правило, публикуется количество очков, которое набрала каждая команда.

В честь ММО выпускаются специальные значки, которыми награждаются все участники ММО (см. 4-ую с. сблочки).

Советская команда принимает участие в ММО с момента их организации.

I ММО (1959 г., Румыния). В составе советской команды выступали 4 участника: *Андрей Тоом* (диплом III степени), *Виктор Федорец* (почетная грамота), *Валерий Фролов* (почетная грамота) и *Александр Четаяев*.

Во II ММО (1960 г., Румыния) и III ММО (1961 г., Венгрия) советская команда участия не принимала.

IV ММО (1962 г., Чехословакия). В составе советской команды выступали 8 участников: *Иосиф Бернштейн* (диплом I степени), *Лидия Гончарова* (диплом I степени), *Алексей Потепун* (диплом II степени), *Григорий Маргулис* (диплом II степени), *Геннадий Куранов* (диплом III степени), *Данияр Муштари* (диплом III степени), *Евгений Панкратов* и *Александр Шерменев*.

<sup>\*</sup>) Е. А. Морозова, И. С. Петраков, Международные математические олимпиады, изд. 3-е, М., «Просвещение», 1971. Подробнее об этой книге см. с. 74.

<sup>\*\*</sup>) См. «Квант», 1970, № 4, с. 49; 1971, № 2, с. 54, № 12, с. 53; 1972, № 11, с. 58.

На V ММО (1963 г., Польша) советская команда выступала в составе: *Геннадий Малолеткин* (диплом I степени), *Рафаэль Саркисян* (диплом I степени), *Алексей Толыго* (диплом I степени), *Анатолий Зайцев* (диплом I степени), *Владимир Фишман* (диплом II степени), *Анатолий Звягинцев* (диплом II степени), *Сергей Смирнов* (диплом II степени), *Кирилл Андреев* (диплом III степени).

VI ММО (1964 г., СССР). Советская команда выступала в следующем составе: *Давид Бернштейн* (диплом I степени), *Геннадий Архипов* (диплом I степени), *Юрий Матиясевиц* (диплом I степени), *Валерий Алексеев* (диплом II степени), *Александр Виленкин* (диплом III степени), *Борис Ивлев* (диплом III степени), *Александр Флоренсэв* (диплом III степени), *Илья Рипс*.

VII ММО (1965 г., ГДР). В состав советской команды входили: *Павел Блехер* (диплом I степени), *Сергей Валландер* (диплом I степени), *Андрей Зубков* (диплом I степени), *Анатолий Пересецкий* (диплом I степени), *Николай Широков* (диплом I степени), *Александр Карзанов* (диплом II степени), *Василий Стояновский* (диплом II степени), *Юрий Муравьев*.

VII ММО (1966 г., Болгария). В состав советской команды вошли: *Юрий Богданский* (диплом I степени), *Сабир Гусейн-заде* (диплом I степени), *Андрей Марченко* (диплом I степени), *Григорий Розенблюм* (диплом I степени), *Михаил Фокин* (диплом I степени), *Борис Матикайнен* (диплом II степени), *Александр Заимских* (диплом III степени), *Сергей Либер*.

IX ММО (1967 г., Югославия). В состав советской команды вошли: *Александр Лившиц* (диплом I степени), *Виктор Турчанинов* (диплом I степени), *Андрей Суслин* (диплом I степени), *Михаил Бошерницан* (диплом II степени), *Юрий Жаринов* (диплом II степени), *Игорь Кричевер* (диплом II степени), *Сергей Соболев* (диплом III степени), *Вячеслав Харламов* (диплом III степени).

X ММО (1968 г., СССР). В составе советской команды выступали: *Михаил Блюдзе* (диплом I степени), *Павел Курчанов* (диплом I степени), *Владимир Пономаренко* (диплом I степени), *Сергей Соболев* (диплом I степени), *Валерий Федотов* (диплом I степени), *Виктор Кумарин* (диплом II степени), *Владимир Макарычев* (диплом III степени), *Геннадий Белый* (диплом III степени).

XI ММО (1969 г., Румыния). В составе советской команды выступали: *Владимир Дринфельд* (диплом I степени), *Андрей Прасолов* (диплом II степени), *Андрей Зелевинский* (диплом II степени), *Андрей Ходулев* (диплом II степени), *Елена Неклюдова* (диплом III степени), *Валерий Соловьев* (диплом III степени), *Аркадий Климов* (диплом III степени), *Павел Суворов*.

XII ММО (1970 г., Венгрия). В состав советской команды вошли: *Андрей Ходулев* (диплом I степени), *Аркадий Климов* (диплом I степени), *Алексей Александров* (диплом II степени), *Сергей Семенов* (диплом III степени), *Велло Альтлейс* (диплом III степени), *Александр Корлюков* (диплом III степени), *Павел Копылов*, *Александр Линецкий*.

XIII ММО (1971 г., Чехословакия). В состав советской команды вошли: *Сергей Гашков* (диплом I степени), *Дмитрий Логачев* (диплом II степени), *Олег Ляшко* (диплом II степени), *Василий Ерохин* (диплом II степени), *Алексей Александров* (диплом II степени), *Михаил Цфасман* (диплом II степени), *Александр Чистов* (диплом III степени), *Евгений Саллинен* (диплом III степени).

XIV ММО (1972 г., Польша). В состав советской команды вошли: *Владимир Бурков* (диплом I степени), *Сергей Конягин* (диплом I степени), *Сергей Белкин* (диплом II степени), *Александр Меркурьев* (диплом II степени), *Андрей Гольберг* (диплом II степени), *Владимир Шварц* (диплом II степени), *Юрий Колмаков* (диплом III степени), *Александр Шаповалов* (диплом III степени).

## Полезная книга



Книга «Начала математического анализа» \*) возникла из лекций, читавшихся на вечернем отделении геологического факультета МГУ, где на весь курс высшей математики (лекции и упражнения) отводилось около ста часов. Автор поставил перед собой задачу познакомить читателей с началами анализа в размере, достаточном для того, чтобы понимать основные пути их применения в естествознании. В соответствии с такой задачей занимающая 24 страницы четвертая глава посвящена введению в теорию дифференциальных уравнений, что редко делается в курсах математического анализа столь малого объема (вся книжка содержит 158 страниц).

С другой стороны, автор не считал возможным пожертвовать принятой у математиков логической отчетливостью изложения, которой иногда пренебрегают в книгах, ориентированных специально на будущих физиков и инженеров. Некоторые

более трудные вопросы выделены в приложение. Например, в основном тексте на с. 55 приводится без доказательства теорема Лагранжа, играющая основную роль при исследовании поведения функций с помощью производных, но ее доказательство приведено на с. 154 в приложении. В приложении даны аккуратные доказательства теорем о существовании у непустого ограниченного числового множества точной верхней грани и о существовании у ограниченной монотонной функции предела. Здесь же доказаны основные теоремы об общих свойствах функций, непрерывных на отрезке (теоремы 3—6), которые обычно доказывают только в больших курсах анализа.

Уместить все это в небольшой книжке автору удалось за счет удачного построения курса и некоторых методических новинок. Книжка может быть хорошим пособием для специализированных математических школ и классов и факультативных занятий в общеобразовательной школе. Ее можно рекомендовать и для самостоятельного изучения школьникам, имеющим серьезное намерение познакомиться с началами математического анализа. Но надо иметь в виду, что изложение ведется строго деловым образом без всяких элементов развлекательности. В книжке нет задач, но их легко найти в различных изданиях \*).

Отмечу один логический пробел, на который автор по меньшей мере должен был бы обратить внимание читателей: на с. 79 определенный интеграл определяется как предел при  $\lambda \rightarrow 0$  (формула (5)). Здесь предел понимается не в том смысле,

который был подробно разъяснен в § 3 первой главы. Необходимое здесь определение предела дано в неявном виде на с. 157: число  $J$  называется пределом интегральных сумм

$$\sigma = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(b - x_{n-1}),$$

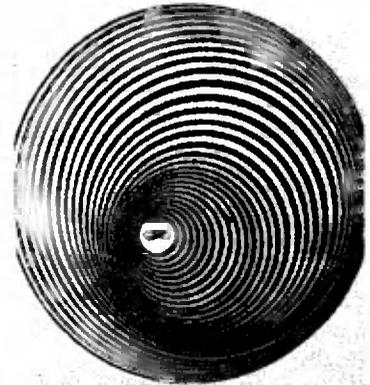
если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех интегральных сумм  $\sigma$  с  $\lambda < \delta$  будет

$$|J - \sigma| < \varepsilon.$$

А. Н. Колмогоров

## Книга

## о международных математических олимпиадах



МЕЖДУНАРОДНЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ОЛИМПИАДЫ

Два года назад вышла третьим изданием книга Е. А. Морозовой и И. С. Петракова «Международные математические олимпиады» \*). Книга содер-

\*) О. С. Ивашев-Мусатов, Начала математического анализа, М., «Наука», 1973.

\*) Например: В. П. Минорский, Сборник задач по высшей математике, М., «Наука», 1971.

\*) Е. А. Морозова, И. С. Петраков, Международные математические олимпиады, изд. 3-е, исправленное и дополненное, М., «Просвещение», 1971.

жит задачи всех Международных математических олимпиад по одиннадцатую включительно; в ней собраны наиболее интересные задачи из материалов Международного жюри олимпиад, не попавшие на соревнования только из-за обилия предложенных задач; представлены задачи национальных олимпиад ряда стран — участниц Международных математических олимпиад.

Кто в состоянии справиться с задачами Международной олимпиады? По статусу Международных олимпиад от участника требуется подготовка по математике в объеме полной средней школы. Но для решения этих задач зачастую достаточно уметь и хотеть грамотно рассуждать, и поэтому некоторые из задач вполне по силам ученикам 7—8 классов. Ценность книги в том и состоит, что она учит мыслить на элементарном математическом материале.

Кто читает эту книгу, кто черпает из нее материал для проверки своих сил и возможностей в математике? Все победители Всесоюзных и Международных олимпиад (кроме, разумеется, самых первых, которые такой возможности не имели) активно пользовались ею при подготовке к соревнованиям. Но не только они. Книга очень полезна и тем школьникам, которые готовятся к областным математическим олимпиадам. Она интересна всем, кто любит элементарную математику, кто хочет научиться самостоятельно решать олимпиадные задачи, математически грамотно рассуждать, *обсуживать свои мысли, кому хочется испытать, что такое «озарение», с помощью которого решаются задачи с «изюминкой».*

Книга «Международные математические олимпиады» не только предлагает читателям задачи, имеющие отношение к олимпиадам. В ней приводятся решения всех задач, данные авторами пособия или участниками олим-

пиад. Авторские решения тщательно продуманы и хорошо отредактированы. Об этом, в частности, свидетельствует такой факт: если по первому и второму изданиям этой книги авторы получали письма, в которых отмечались отдельные недочеты и указывалось на опечатки, то после выхода в свет третьего издания авторы получают только новые варианты решений (иногда более изящные) задач, найденные читателями.

К сожалению, из третьего издания книги исключен почти полностью весь иллюстративный материал; в том числе по непонятным причинам исчезли фотографии первых призеров олимпиад. Думается, что в последующих изданиях этот недостаток будет устранен.

А потребность в новом издании имеется настоятельная. После одиннадцатой олимпиады прошли еще четыре Международные математические олимпиады. Нет никаких сомнений, что у авторов накопился богатый и интересный материал, который с нетерпением ожидается любителями математики. К тому же, первые три издания вышли небольшими тиражами, найти книгу практически невозможно, и многие теперешние старшеклассники знают о ней, главным образом, по рассказам старших товарищей.

Было бы хорошо, если бы авторы в последующих изданиях рассказали о судьбах победителей олимпиад. Многие из них стали видными педагогами и известными учеными. Очевидно, участие в олимпиадах сыграло в их судьбе немалую роль.

В заключение приведем несколько задач из этого сборника.

75. Дан ящик сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Как возможно быстрее отвесить покупателю 1 кг сахару? (Указать схему уравновешиваний.)

112. Два зеркала образуют двугранный угол с раствором  $\alpha$ . Внутри угла

стоят свеча и наблюдатель. Сколько изображений свечи видит наблюдатель?

154. Длинный коридор единичной ширины имеет форму буквы «Г». Жесткая длинная труба (шириной можно пренебречь) положена и всюду касается пола. Длинной труб (труба может быть искривлена) называется прямолинейное расстояние между ее концами. Найти максимальную длину трубы, чтобы трубу можно было протащить вдоль обоих колен коридора и повернуть в углу, не отрывая от пола.

167. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

а) среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;

б) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда утверждение:

в) не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

В. Н. Березин,  
Н. М. Доронина

## «Квант» для младших школьников

### Задачи

1. Фигуристка, вращаясь при парном катании вокруг своей оси, 20 раз повернулась лицом к своему партнеру, который за это же время, равное 10 секундам, сделал два оборота вокруг фигуристки.

Сколько оборотов в секунду выполняла фигуристка?

2. Почему трудно прыгнуть на берег с легкой лодки?

3. В следующем примере цифры зашифрованы буквами. Расшифруйте пример:

$$\text{ива} : \text{да} = \text{да}$$

$$- \quad \times \quad +$$

$$\text{ау} + \text{а} = \text{лв}$$

---


$$\text{дол} - \text{уа} = \text{уд}$$

4. Чтобы снег на тротуарах скорее таял, его посыпают солью. С другой стороны, для получения низких температур снег смешивают с солью в отношении две весовые части к одной весовой части. Таким образом, соль в первом случае как бы способствует нагреванию, а во втором — охлаждению. Нет ли здесь противоречия?

5. От необитаемого острова отошла лодка, на создание которой у Робинзона ушло 20 лет. На плече у Робинзона сидел любимец-попугай. Вот что он иногда произносил:

— Хватайся за меня! Мы выплывем на берег. Слушай меня, ведь я втрое старше тебя.

— Еще ни один корабль не подошел к нам. Надо самим строить лодку. Море-то я хорошо знаю, ведь прожил две твои жизни.

— Крепим весло! Мы еще погуляем по большой земле, хоть мне лет вполтину больше, чем тебе.

Сколько лет попугаю? Сколько лет провел Робинзон на острове?



## Почему подушка мягкая?

Почему подушка мягкая? Почему удобно лежать на перине или на надувном матрасе? Почему лежать на досках или твердой земле неудобно?

Если вы просто скажете, что пух и воздух мягкие, а доски и земля твердые, то будете не совсем правы. Дело вовсе не в свойстве материала — и доски и твердая глина могут быть «мягкими». И из твердого материала можно сделать удобное «ложе», если придать ему форму человеческого тела.

Представьте себе, что вы легли на мягкую глину и оставили в ней углубление, соответствующее форме вашего тела. Высохнув, глина станет твердой, как камень. Если теперь вы ляжете в получившееся углубление, то вам будет очень удобно, несмотря на то, что ваше «ложе» никак не назовешь мягким (правда, при высыхании размер несколько изменится, но мы это учитывать не будем).

Так в чем же дело? Оказывается, впечатление мягкости или твердости зависит не от свойства материала, а от величины давления на поверхность тела. Проведем небольшой расчет.

Будем считать, что масса взрослого человека — около 60 кг, поверхность тела — примерно 2 м<sup>2</sup>. Если человек лежит в постели, которая прогибается и как бы «охватывает» тело, с ней соприкасается примерно четверть всей поверхности его тела.

Нетрудно подсчитать, что в этом случае на один квадратный сантиметр поверхности тела приходится всего 12 Г. А если этот же человек ляжет на твердую, неупругую поверхность, площадь соприкосновения составит только около ста квадратных сантиметров. Тогда на один квадратный сантиметр придется уже 600 Г, то есть давление возрастет в 50 раз!

Н. М.

Художник Э. Назаров



## Ответы, указания, решения

### К статье «Поверхностное натяжение чертит гиперболу»

Жидкость, поднявшаяся между пластинами, растянута. Чем выше выделенный столбик (см. рис. 4 в статье), тем меньше давление этого столбика на данном уровне. Отсюда и появляется горизонтальная сила, уравнивающая горизонтальную составляющую силы поверхностного натяжения

### К статье «Механика помогает геометрии»

1. По формулам (2), (4), (6) имеем  $(a+b)CC_1^2 = J_C - J_{C_1}$ ,  $J_C = a^2b + b^2a$ .

$$J_{C_1} = \frac{abc^2}{a+b}$$

2. Поместим в вершинах  $A, B, C$  массы  $a, b, c$ . Тогда по формулам (2) и (9) имеем  $J_Z = a \cdot ZA^2 + b \cdot ZB^2 + c \cdot ZC^2$ ,  $J_Z = abc$ , откуда следует требуемое тождество.

3. Поместим в вершинах квадрата  $A_1A_2A_3A_4$  равные массы (по 1 грамму). Центром тяжести возникшей системы из 4 материальных точек является центр  $Z$  квадрата.

Пусть  $P$  — какая-либо точка плоскости. Тогда по формулам (2) и (3) имеем  $J_P - J_Z = 4ZP^2$ ,  $J_Z = ZA_1^2 + ZA_2^2 + ZA_3^2 + ZA_4^2 = 2a^2$ ,  $J_P = PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_4^2$ . Из этих трех равенств видно, что последняя сумма тогда и только тогда равна  $c^2$ , когда  $4ZP^2 = c^2 - 2a^2$ . Поэтому искомая фигура — окружность с центром  $Z$  радиуса

$$\frac{1}{2} \sqrt{c^2 - 2a^2}$$

4. Сначала вычислите расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения медиан. Для этого воспользуйтесь формулами (2) и (3) и решением задачи 2 (в статье).

### К статье «Числовые данные в геометрических задачах»

1.  $\sqrt{10}$ .

2.  $\frac{225\sqrt{2}}{8}$ .

3.  $\frac{7}{6} \sqrt{\frac{22}{39}}$ . Указание.  $BD$  — медиана.

4.  $\frac{4a}{\sqrt{114}}$ .

5.  $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  см.

6. 24 см.

7.  $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ . Указание. Пусть  $D$  лежит на дуге  $AC$ , тогда  $AD = CD$ .

8.  $1/12$ . Указание. Площади трех треугольников, образованных отрезками медиан (от вершин до точки пересечения медиан) и сторонами исходного треугольника, равны.

$$9. \left[ 10 \left( 1 + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{19}}{10}} \right) \right] \times \\ \times \left[ 10 \left( 1 - \sqrt{\frac{3 + \sqrt{19}}{10}} \right) \right] \times \\ \times \left[ \frac{7 + \sqrt{19}}{2} \right].$$

10.  $\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1} R, \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1} R$ .

11.  $5/2$ . Указание.  $\triangle ABC$  прямоугольный,  $CD$  — диаметр проведенной окружности,  $\sin \angle C$  легко находится.

### К статье «Кинематика прямолинейного движения материальной точки»

1.  $t = 80$  с.

2.  $v_{\text{ср}} = 12,5$  м/с.

3.  $l_0 = 405$  м;  $l_{\text{max}} = 725$  м.

4.  $t = 3$  с.

5.  $H_{\text{max}} = 107,2$  м;  $t \approx 5,8$  с;  $v \approx 46$  м/с.

6.  $h \approx 8,8$  м.

7. См. рисунок 1.

### К статье «Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Факультет физико-математических и естественных наук

#### Вариант 1

1.  $x = 2, y = 2, z = 2$ .

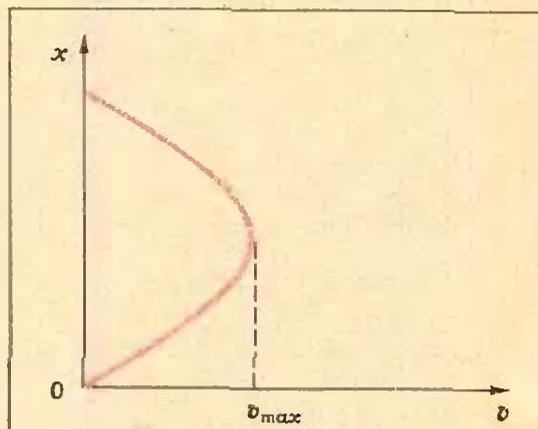


Рис. 1.

2. Если  $a > 1$ , то  $a^{-2} < x < a$ ; если  $0 < a < 1$ , то  $0 < x < a$  и  $x > a^{-2}$ .

3.  $x = \frac{k\pi}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Указание. Проверить, что правая часть уравнения равна  $\frac{1}{4}$ . Далее доказать, что уравнение  $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1$  удовлетворяется, лишь если  $\sin^2 x = 1$  (и  $\cos x = 0$ ) или если  $\cos^2 x = 1$  (и  $\sin x = 0$ ).

4.  $\arcsin\left(\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)$ .

Вариант 2

1.  $z_1 = 2 + i$ ;  $z_2 = 3 + \frac{2}{3}i$ .

2.  $x > 2$ .

3.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$y = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4.  $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{1}{3} + \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha}$

Вариант 3

1. Если  $a > b$ , то  $x \geq -2b$ ; если  $a < b$  то  $x \geq -2a$ ; если  $a = b$ , то решений нет.

2.  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{1}{5}$ .

3.  $x = \frac{(k+l+1)\pi}{2}$ ,  $y = \frac{(k-l)\pi}{2}$ ,

где  $k$  и  $l$  — любые целые числа.

4.  $\frac{37 + 3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-1} \pi R^2$ . Указание. По-

старайтесь возможно яснее представить себе полушар, вписанный в усеченный конус; обратите внимание на то, что у данного усеченного конуса большим является верхнее основание.

Инженерный факультет

Вариант 1

1.  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 5$ . Указание. Сделать замену  $x - 2 = y$ .

2.  $x > -1$ .

3.  $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} +$

$+ 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4.  $\frac{1}{3} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$ .

Вариант 2

1.  $x < -2$ ,  $-\frac{1}{2} < x < 0$ ,  $0 < x < \frac{1}{2}$ ,  $x > 2$ .

2.  $x = 5$ .

3.  $x_1 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4.  $\frac{2a^4}{a^2 - 4R^2}$ .

К статье «Телевидение готовят в вуз»

Физика

1. Три шарика лежат на дне сосуда, четвертый сверху опирается на них. Соединив центры шариков, получим правильную треугольную пирамиду.

Рассмотрим взаимодействие верхнего и одного из нижних шариков (см. рис. 2).

Сила давления нижнего шарика на стенку сосуда равна

$$F_x = F_3 \cos \alpha,$$

где  $F_3$  — сила действия верхнего шарика на нижний.

На верхний шарик действуют силы:  $mg$ ,  $F_1 = F_3$  и  $F_2$  — сила действия остальных двух нижних шариков на верхний. Из условия равновесия верхнего шарика

$$F_1 = \frac{mg}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Из треугольника  $ABC$   $\cos \alpha = \frac{D-d}{2d}$

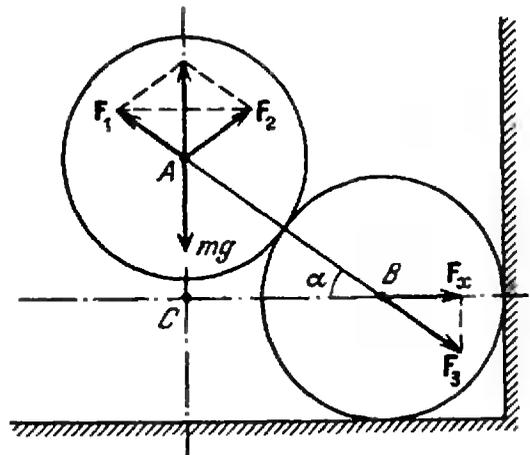


Рис. 2.

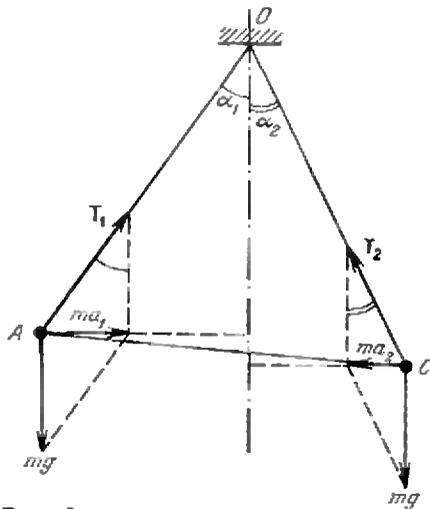


Рис. 3.

тогда

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{3d^2 - D^2 + 2dD}{4d^2}}$$

Масса шарика  $m = \rho \pi \frac{d^3}{6}$

Окончательно получим

$$F_x = \frac{\pi d^3}{12} \rho g \frac{D - d}{\sqrt{3d^2 - D^2 + 2dD}} = 1,7 \text{ н.}$$

$$2. \quad l = \frac{v^2}{kg} = 12,8 \text{ м.}$$

**Указание.** Воспользоваться законом сохранения энергии.

3. На рисунке 3 изображены два равновесных положения шарика: A и C. Из треугольника AOC по теореме косинусов

$$AC = l \sqrt{2(1 - \cos \alpha)},$$

где  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a_1}{g}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{a_2}{g}$ .

Таким образом,

$$AC = l \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos \left( \operatorname{arctg} \frac{a_1}{g} + \operatorname{arctg} \frac{a_2}{g} \right)} \approx 0,24 \text{ м.}$$

Корректор Т. С. Вайсберг

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 6/VI-73 г. Подписано в печать 20/IX-73 г. Бумага 70 x 100 1/16. Физ. печ. л. 5. Усл. печ. л. 6,50 Уч.-изд. л. 7,06 Тираж 340290 экз. Г 14477 Цена 30 коп. Заказ 1568

Математика

1. Так как  $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$  при  $k < n$ ,

то

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

2. Пусть, для определенности,  $0 < a \leq b$ . Напишем доказываемое неравенство в виде  $b^n (1+x)^n < 2^n (1+x^n) b^n$ ,

где  $x = \frac{a}{b}$ . Поскольку  $0 < a \leq b$ , то  $0 < x \leq 1$ , а тогда  $(1+x)^n \leq (1+1)^n = 2^n < 2^n + 2^n x^n = 2^n (1+x^n)$ .

3. Доказательство. Поскольку  $2^{105} + 3^{105} = (2^3)^{35} + (3^3)^{35} = 8^{35} + 27^{35} = (8+27)(8^{34} - 8^{33} \cdot 27 + \dots + 27^{34})$ , то  $2^{105} + 3^{105}$  делится на 35. Аналогично доказываются другие утверждения.

4. 95, 494. **Указание.** Представьте 589 в виде  $1 \cdot 19 \cdot 31$ ; искомые числа имеют вид  $19n, 19m$ , или  $31n, 31m$ , где  $m, n$  — натуральные числа.

5. Приведем одно из возможных решений.

Так как  $\sin \beta = \sin [(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$ ,

то равенство  $\sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$  можно записать в виде

$$2 \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha.$$

Поделив обе части последнего равенства на  $\cos \alpha \cos(\alpha + \beta) \neq 0$ , получим

$$2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Окончание смотрите в № 12.

К задачам «Квант» для младших школьников

(см. «Квант», 1973, № 10)

1.  $338 \times 275 = 92\,950$ .

2. Сначала нужно включить задний тормоз, а затем передний. Если сделать наоборот, велосипед может перевернуться.

3. 8 и 10 марок.

4. Спираль электронагревателя расплавится, так как воздух гораздо хуже проводит тепло, чем вода.

5. 1 — 1/6.

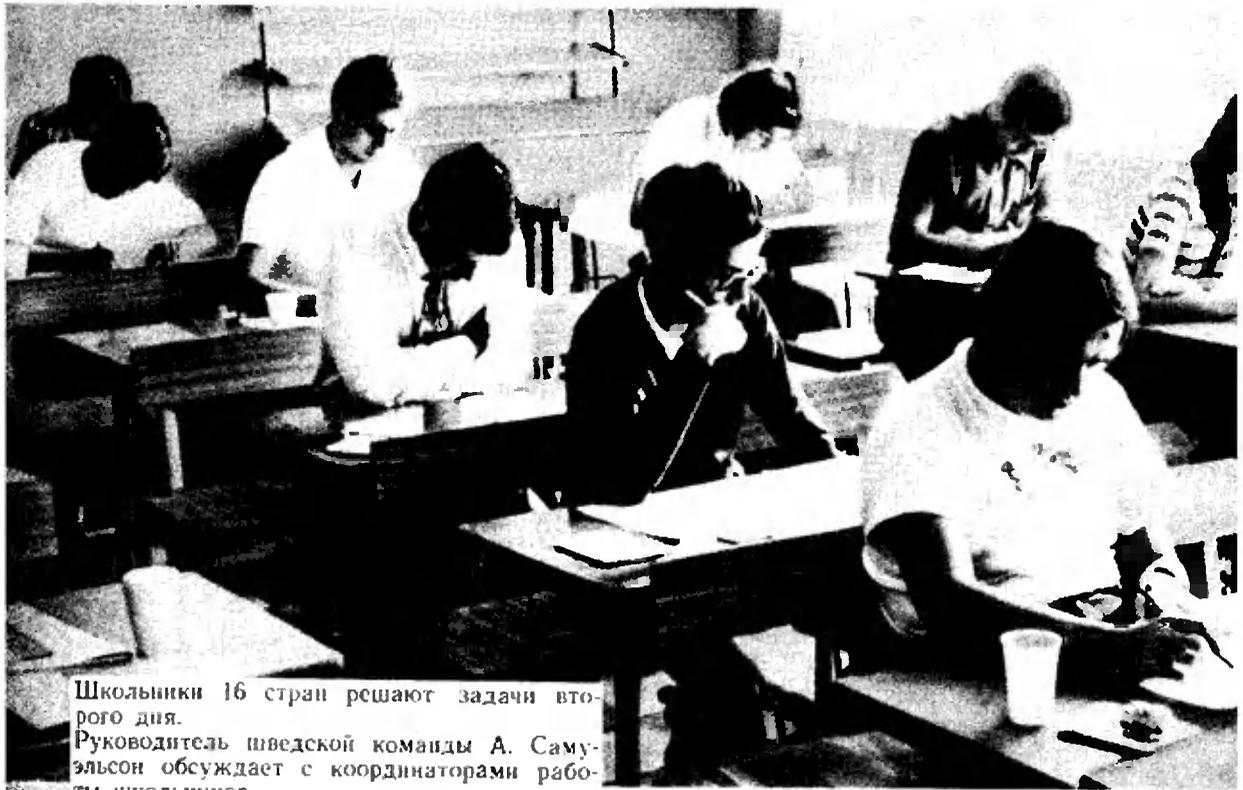
6. Ток равен нулю.

Чеховский полиграфический комбинат  
Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

МОСКВА  
**ХV**  
**IMO**  
1973

**ХV МЕЖДУНАРОДНАЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**



Школьники 16 стран решают задачи второго дня.  
Руководитель шведской команды А. Самуэльсон обсуждает с координаторами работы школьников.





### ЗНАЧКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕЖДУНАРОДНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

В честь Международных математических олимпиад выпускаются специальные значки, которые вручаются всем участникам олимпиад.

На рисунке 1 изображен значок Румынской национальной олимпиады, вручавшийся участникам I и II Международных математических олимпиад.

На рисунке 2 изображен значок, посвященный IV олимпиаде. (Специального значка к III олимпиаде не выпускали).

На рисунке 3 приведен значок, посвященный VI олимпиаде. (Специального значка V олимпиады не было.)

Значок, выпущенный к VII олимпиаде, изображен на рисунке 4.

На рисунке 5 изображен значок, выпущенный к VIII олимпиаде.

На рисунке 6 изображен значок, выпущенный к IX олимпиаде.

Значок X олимпиады показан на рисунке 7.

На рисунке 8, 9, 10 приведены соответственно значки XI, XII и XIII ММО.

Специальные значки к XIV и XV олимпиадам не выпускались.